Vzorové riešenia 4. série, kategória 5–7

Úloha M1: Slová – *Opravovali Ákos Záhorský a Fedor Župník*
Dian si všimol, že slová na Rudyho škatuli nie sú až také náhodné. Všimol si, že jedno zo slov bolo slovo „ČAMON“. Potom si tiež všimol, že všetky slová na Rudyho škatuli sú len kombinácie týchto písmen (napríklad slová „ONMAČ“ alebo „ČOANM“). Po chvíli rátania prišiel Dian na to, že Rudy má na škatuli napísané všetky takéto kombinácie týchto písmen a ešte k tomu sú zoradené podľa abecedy (takže slovo „AČMNO“ bolo prvé a slovo „ONMČA“ bolo posledné). **Koľko slov bolo celkovo na škatuli? Koľké v poradí sa nachádzalo slovo „MONČA“?**

Vieme, že máme 5 písmeniek, ktoré chceme usporiadať všetkými možnými spôsobmi. Môžeme si vypísať všetky, ako to aj niektorí urobili, no naskytne sa nám aj elegantnejšie riešenie. Najprv si predstavme, že máme takéto písmenká dve. Ako ich môžeme usporiadať? Dvoma spôsobmi. (1,2) (2,1). Čo sa však stane, keď chceme usporiadať tri takéto písmenká? Máme šesť spôsobov, ako to urobiť, pretože v každej z možností: (1,2) alebo (2,1) môžeme vsunúť tretie písmenko na ktorékoľvek z miest, prvé, druhé alebo tretie. Dostaneme tak (**3**,1,2) (1,**3**,2) (1,2,**3**) alebo (**3**,2,1) (2,**3**,1) (2,1,**3**). To nám teda urobí 3·(počet možností, ako usporiadať dve) možností.

Zopakujme to so štyrmi písmenkami. Znova vidíme, že štvrté sa vie vsunúť kamkoľvek, a má 4·(počet možností, ako usporiadať tri) možností, ako to urobiť. Pri štyroch písmenkách teda máme $4\cdot 6 = 24$ možností. Takýto myšlienkový postup použijeme aj pre 5 písmeniek, dostaneme sa teda k číslu $5\cdot 24 = 120$. Takže **počet spôsobov, ako usporiadať 5 rôznych písmen, je $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$.**

Teraz sa pozrime, koľké v poradí (podľa abecedy) bude slovo „MONČA“. Už vieme, že je 24 spôsobov, ako usporiadať štyri písmenká. Takže keď zvolíme nejaké začiatočné písmeno, tak bude existovať 24 slov, kde sa budú iba obmieňať zvyšné 4 písmenká. Keďže naše slová sú zoradené podľa abecedy, tak to znamená, že najprv bude 24 slov začínajúcich na A, potom bude 24 slov začínajúcich na Č, a potom bude 24 slov začínajúcich na M.

Teraz si stačí všimnúť, že písmenká po M v slove „MONČA“ sú usporiadané opačne podľa abecedy. Vieme teda, že spomedzi tých 24 slov, ktoré sa začínajú na M, musí byť „MONČA“ celkom posledné. Stačí nám teda sčítať 24+24+24. **Slovo „MONČA“ je 72. v poradí.**

<u>Bodovanie</u>:
počet slov – 3b.; poradové číslo slova „MONČA“ – 2b.;

Úloha M2: Kamenní mužíčkovia – *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková*
Na čistinke bolo presne 60 kamenných mužíčkov, ktorí stáli v kruhu. Čamon sa ich opýtal, kde je drahokam. Všetci hneď začali vykrikovať, kde je drahokam. Niektoré tvrdenia si však navzájom odporovali, preto Čamon usúdil, že niektorí klamú a iní zase hovoria pravdu. Tak sa všetkých mužíčkov spýtal, kto klame. Každý z mužíčkov odpovedal rovnako: „Ten napravo aj naľavo odo mňa klame." **Koľko najviac a koľko najmenej mužíčkov mohlo klamať?**

Pozrime sa na vetu „*Ten napravo aj naľavo odo mňa klame.*" Kedy je táto veta pravdivá a kedy nepravdivá? Ak je pravdivá, tak mužíček napravo aj naľavo skutočne klame. Žiadna iná možnosť nie je a okolo pravdovravného mužíčka teda musia sedieť dvaja klamári. Zaznačíme si to ako (K-**P**-K). Ak je veta nepravdivá, tak nie je pravda, že obaja susedia klamú, a teda aspoň jeden musí hovoriť pravdu. Stačí, aby jeden mužíček hovoril pravdu, druhý môže aj klamať. Máme tak dve možnosti, ako to môže vyzerať okolo klamára: buď sedí medzi dvoma pravdovravnými (P-**K**-P), alebo medzi pravdovravným a klamárom (K-**K**-P alebo P-**K**-K).

Skúsme vyplniť kruh tak, aby bolo čo najmenej **K** a čo najviac **P**. Keď usadíme jedného **P**, okolo neho musia byť dvaja **K**. Tí dvaja už pri sebe majú jedného **P** (toho prvého), takže na druhej strane pri každom z nich môže sedieť **P** aj **K**. Keďže chceme čo najviac **P**, posadíme tam **P**. Okolo toho opäť musia sedieť dvaja **K** a celá situácia sa opakuje.

Vznikne nám takto postupnosť ...-K-P-K-**P**-K-P-K-... Keďže sa pekne striedajú, znamená to, že polovica zo 60 mužíčkov sú **P** a druhá polovica **K**.

Ako by to vyzeralo, keby sme chceli čo najviac **K**? Usadíme jedného **K**. Okolo neho musí byť jeden **P**, ale druhý môže byť **P** aj **K**. Keďže chceme čo najviac **K**, posadíme tam **K** (P-**K**-K). Aby ten nový **K** naozaj klamal, musí na jeho druhej strane sedieť **P** (P-**K**-<u>K-P</u>). Okolo tohto nového **P** zas musia byť len **K**, takže (P-**K**-K-<u>P-K</u>), a tak ďalej.

Vznikne nám postupnosť ...-P-K-K-P-K-K-..., ktorá sa skladá z po sebe idúcich trojíc P-K-K. Tým pádom zo 60 mužíčkov sú 2/3 **K** a 1/3 **P**.

Už vieme, že dvaja **P** nemôžu sedieť vedľa seba (pretože by každý z nich klamal). Preto ak si všetkých 60 mužíčkov rozdelíme na dvojice, tak v každej je najviac jeden **P**. Presne také rozostavenie sme už našli. **Najmenej klamárov môže byť 30.**

Taktiež nemôžu vedľa seba sedieť traja **K** (stredný by vravel pravdu a nebol by **K**). Ak všetkých 60 mužíčkov rozdelíme na trojice, tak najviac dvaja z každej trojice môžu byť **K**. Presne také rozostavenie sme tiež už našli. **Najviac klamárov môže byť 40.**

<u>Bodovanie</u>:
rozobratie možností, ako môžu mužíčkovia sedieť – 3b.; ukázanie, koľko najviac/najmenej **K** môže byť – 2b.; ak ste nesprávne určili, kedy je veta klamstvo – max 1b.

Úloha M3: Hádanka – *Opravovala Katarína „Kat" Sučíková*

„Kedysi tu nebol les, ale krásna dedinka plná škatuľónov. Mal som tu veľa kamarátov, ale najradšej som mal Jotama, ktorý býval kúsok odtiaľto. Jotam každé ráno vstával v ten istý čas a chodil do školy tou istou cestou, no aj tak niekedy meškal. Dôvody, prečo meškal, niekedy naozaj stáli za to:

- V pondelok si pred odchodom umyl zuby a vyleštil topánky a prišiel do školy 10 minút pred zvonením.
- V utorok nakŕmil mačsovy a umyl si zuby, a tak meškal 5 minút.
- V stredu povysával, išiel nakúpiť a umyl si zuby a do školy prišiel 8 minút pred zvonením.
- Vo štvrtok si umyl zuby, vyleštil topánky, a ešte aj nakúpil a prišiel tesne, len 3 minúty pred zvonením.
- V piatok povysával, umyl si zuby a nakŕmil mačsovy, a tak meškal 7 minút.

Ďalší pondelok mali písomku, a tak sa Jotam rozhodol, že si len umyje zuby a pôjde hneď do školy, aby si ešte stihol zopakovať učivo. **Koľko minút pred zvonením prišiel?**"

Jotam vstával každé ráno v rovnaký čas a do školy išiel tou istou cestou, avšak každé ráno ešte robil niektoré z týchto aktivít: vysávanie (V), umývanie zubov (Z), kŕmenie mačsov (M), nakupovanie (N) a leštenie topánok (T). Kvôli tomu vždy prišiel do školy v iný čas. Informácie zo zadania si môžeme prehľadne zhrnúť v tabuľke.

Deň	Aktivita	Pred zvonením	Po zvonení
pondelok	Z + T	10 minút	
utorok	Z + M		5 minút
streda	Z + V + N	8 minút	
štvrtok	Z + N + T	3 minúty	
piatok	Z + V + M		7 minút

Našou úlohou je zistiť, kedy by prišiel do školy, ak by si ráno iba umyl zuby a hneď vyrazil.

Porovnajme pondelok a štvrtok. Vo štvrtok Jotam urobil všetko to, čo aj v pondelok (Z + T), akurát ešte k tomu išiel aj nakúpiť (Z + N + T). Do školy prišiel vo štvrtok o 7 minút neskôr ako v pondelok (iba 3 minúty pred zvonením namiesto 10). Z toho je jasné, že nákup mu zabral presne týchto 7 minút. Môžeme si zapísať, že N = 7.

Porovnajme utorok a piatok. V piatok Jotam urobil všetko to, čo aj v utorok (Z + M), akurát ešte k tomu aj povysával (Z + V + M). Do školy prišiel v piatok o 2 minúty neskôr ako v utorok (až 7 minút po zvonení namiesto 5). Z toho je jasné, že vysávanie mu zabralo presne tieto 2 minúty. Môžeme si zapísať, že V = 2.

Teraz sa pozrime na stredu. Okrem umývania zubov robil ráno presne tieto dve aktivity, ktorých trvanie sme práve zistili – nákup a vysávanie – a do školy prišiel 8 minút pred zvonením. Ak by vynechal aj nákup aj vysávanie, dostal by sa presne do tej situácie, ktorá nás zaujíma: iba umyť zuby a vyraziť. Okrem toho už vieme, že vynechaním nákupu a vysávania by ušetril 7+2 = 9 minút, a teda do školy by prišiel nie iba 8, ale až 8+9 = **17 minút pred zvonením.**

Bodovanie:

správna odpoveď – 2b.; spracovanie informácií zo zadania (napríklad tabuľka, zapísanie rovníc alebo časová os, ...) – 1b.; vysvetlenie, ako sme našli výsledný čas – 2b.

Úloha M4: Heslo – *Opravovali Katarína „Katka“ Marčeková*
Karolína „Kaja“ Pisoňová

Ani jeden z tvorov si toto heslo nepamätal, ale pamätali si, **že ním skúšali vydeliť svoje obľúbené čísla**. Ani jednému to nevyšlo bezo zvyšku – zelený tvor dostal zvyšok 8, modrý zvyšok 2 a fialový zvyšok 4. Jazmíne sa to zdalo ako málo informácií, a tak im tvorovia ešte povedali, že obľúbené číslo modrého tvora bolo o 30 väčšie ako obľúbené číslo zeleného a obľúbené číslo fialového bolo o 50 väčšie ako modrého. A že viac im nepovedia, tak nech sa poponáhľajú, inak ich premenia na muchotrávky! **Aké bolo heslo?**

Ako prvé si môžeme všimnúť, že nebudeme potrebovať toľko neznámych čísel, ako máme v zadaní. Stačí nám vedieť, že obľúbené číslo modrého tvora $(\mathbf{M})$ je o 30 väčšie ako obľúbené číslo zeleného tvora $(\mathbf{Z})$ a obľúbené číslo fialového $(\mathbf{F})$ je o 50 väčšie ako obľúbené číslo zeleného: $\mathbf{M} = (\mathbf{Z} + \mathbf{30})$ a $\mathbf{F} = \mathbf{M} + \mathbf{50} = \mathbf{Z} + \mathbf{30} + \mathbf{50} = (\mathbf{Z} + \mathbf{80})$.

Ak samotné $\boldsymbol{Z}$ dáva po delení heslom zvyšok 8, tak potom $(\boldsymbol{Z} - \mathbf{8})$ musí byť deliteľné heslom bezo zvyšku. Podobne, ak $(\mathbf{Z} + \mathbf{30})$ dáva po delení heslom zvyšok 2, tak potom $(\mathbf{Z} + \mathbf{30}) - \mathbf{2} = (\mathbf{Z} + \mathbf{28})$ musí byť deliteľné heslom bezo zvyšku. No a ak $(\mathbf{Z} + \mathbf{80})$ dáva po delení heslom zvyšok 4, tak potom $(\mathbf{Z} + \mathbf{80}) - \mathbf{4} = (\mathbf{Z} + \mathbf{76})$ musí byť deliteľné heslom bezo zvyšku.

Keď sú dve čísla deliteľné tým istým číslom, nazvime ho $\boldsymbol{d}$, tak sa dajú zapísať ako jeho násobky, napríklad $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{d}$ a $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{d}$. Keď potom vypočítame ich rozdiel ako $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{d} - \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{d} = (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{m}) \cdot \boldsymbol{d}$, vidíme, že aj tento ich rozdiel bude deliteľný číslom $\boldsymbol{d}$. Preto keď čísla $(\mathbf{Z} - \mathbf{8})$, $(\mathbf{Z} + \mathbf{28})$ aj $(\mathbf{Z} + \mathbf{76})$ sú všetky deliteľné heslom bezo zvyšku, tak aj ich rozdiely budú deliteľné heslom bezo zvyšku.

$$(\mathbf{Z} + \mathbf{28}) - (\mathbf{Z} - \mathbf{8}) = \mathbf{36}$$
$$(\mathbf{Z} + \mathbf{76}) - (\mathbf{Z} - \mathbf{8}) = \mathbf{84}$$
$$(\mathbf{Z} + \mathbf{76}) - (\mathbf{Z} + \mathbf{28}) = \mathbf{48}$$

Každé z čísel 36, 84, 48 je teda deliteľné heslom, preto heslo musí byť niektorý z ich spoločných deliteľov. Ich spoločnými deliteľmi sú čísla 1, 2, 3, 4, 6, 12. Vieme však aj to, že heslo musí byť väčšie ako 8, keďže $\boldsymbol{Z}$ dáva po delení heslom zvyšok 8. Jediné číslo spĺňa obe tieto podmienky. **Heslo je 12.**

Bodovanie:

za skúšanie hesiel bez vysvetlenia, že žiadne iné číslo nemôže byť heslom – najviac 3b.; ak chýbalo vysvetlenie, prečo je heslo spoločný násobok čísel 48 a 84 – mínus 1b.; ak chýbalo vysvetlenie, prečo musí heslo byť väčšie ako 8 – mínus 0,5b.

Úloha M5: Krištáľová guľa – *Opravovali Martin „Panda“ Svetlík*
Jakub „Kubo“ Hluško

„Je tam akási tabuľka 9 × 9 a v jej políčkach sú napísané prirodzené čísla. Ak vypočítam súčty všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci, dostanem 18 súčtov. Ale čo s tým? Počkať, je tu napísané: Môže sa stať, že týchto 18 súčtov bude osemnásť po sebe idúcich čísel?“ **Nájdi také vyplnenie tabuľky, alebo vysvetli, prečo sa to nedá.**

Na začiatok ste určite mnohí skúsili tabuľku vyplniť tak, aby v nej vznikli len samé po sebe idúce súčty. Niektorým sa podarilo vyplniť tabuľky s párnymi rozmermi, ale 9×9 nijakovsky nešlo. Keď už sa zdá, že to skoro máme, vždy sa nám tam objaví nejaký súčet, ktorý už je raz použitý, alebo ktorý je úplne mimo. A keď ho chceme zmeniť (napríklad by nám nesedel súčet v jednom riadku, tak v ňom zmeníme nejaké číslo), pokazíme si tým iný súčet (v stĺpci, v ktorom sme to číslo zmenili). Ak opravíme riadok, pokazíme nejaký stĺpec, a naopak.

A práve v tom tkvie celá záhada tejto úlohy. Každé číslo totiž prispieva do súčtu jedného riadku, ale aj do súčtu jedného stĺpca.

Ak sčítame všetky súčty jednotlivých riadkov dokopy, dostaneme vlastne súčet všetkých čísel v tabuľke. Rovnako keď sčítame všetky súčty stĺpcov, dostaneme súčet všetkých čísel v tabuľke. Takže keď sčítame dokopy všetky súčty riadkov aj stĺpcov, dostaneme číslo, v ktorom bude každé z čísel tabuľky zarátané **dvakrát**. Toto číslo teda určite bude párne. Lenže to je problém!

Keď sčítame ľubovoľných 18 po sebe idúcich čísel, sčítavame 9 párnych a 9 nepárnych čísel. Tým pádom bude tento súčet vždy nepárny. Ak ale 18 súčtov z tabuľky dáva párny súčet a 18 ľubovoľných po sebe idúcich čísel dáva nepárny súčet, tak to jasne znamená, že **súčty z tabuľky nikdy nemôžu byť žiadnych 18 po sebe idúcich čísel**.

Bodovanie:
správna odpoveď – 0,5b.; uvedomenie si, že každé číslo zasahuje do jedného riadku a jedného stĺpca – 0,5b.; súčet súčtov riadkov je rovnaký ako súčet súčtov stĺpcov – 1,5b.; 18 po sebe idúcich čísel dáva nepárny súčet – 1,5b.; spojenie týchto poznatkov a vhodné sformulovanie finálneho výsledku, dôkazu – 1b.

p-mat

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat