Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

35. ročník www.pikomat.sk školský rok 2017/2018

Vzorové riešenia 2. série, kategória 5–7

Úloha M1: Magický deň – *Opravovala Zuzana „Bum" Bogárová*

„Deň nazývame magický, ak jeho dátum v tvare DD.MM.RRRR (DD označuje deň, MM označuje mesiac a RRRR označuje rok) pozostáva z ôsmich rôznych číslic. Ak je deň alebo mesiac číslo menšie ako 10, doplní sa pred neho nula. Napríklad 26.04.1785 bude magický deň**. Kedy najbližšie, od vášho času, takže od začiatku roku 2017, bude magický deň? Aký to bude dátum?**"

Hľadáme najbližší magický dátum od začiatku roku 2017. K dispozícii máme cifry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9, každú z nich môžeme použiť najviac raz.

Najprv poďme zistiť, ktoré cifry určite potrebujeme na zápis dní a mesiacov. Mesiac musí začínať 0 alebo 1. Teda na zápis mesiaca určite potrebujeme použiť najmenej jedno z čísel 0 alebo 1. Deň musí začínať 0, 1, 2 alebo 3. Ak ale začína 3, musí nasledovať 0 alebo 1. Teda na zápis dňa určite potrebujeme použiť aspoň jedno z čísel 0, 1 alebo 2.

Dátum najviac ovplyvňuje rok, preto sa pokúsime dostať rok čo najmenší. Najmenší možný rok by bol 2017, ale tento zápis obsahuje všetky čísla 0, 1 a 2. Vieme, že jedno z týchto čísel potrebujeme na zápis dňa. A jedno z čísel 0 a 1 potrebujeme na zápis mesiaca.

Aby bol rok čo najmenší, ponecháme si v ňom na začiatku cifru 2. Ale potom v ňom nemôžu byť použité ani cifra 0, ani 1, aby sme boli schopní zapísať mesiac a deň. Keďže chceme čo najmenší rok, doplníme čo najmenšie cifry, ktoré nepotrebujeme v dni a mesiaci. Najbližší rok, v ktorom môže byť magický dátum, je preto 2345. V tomto roku najskorší dátum ovplyvňuje mesiac, takže aj ten chceme urobiť čo najmenší. Preto bude musieť začínať cifrou 0. Cifru 1 nemôžeme použiť v mesiaci, lebo ju potrebujeme v dni, takže najmenší mesiac bude 06, čiže jún. No a potom doplníme už iba najmenší deň, a to je 17. **Najbližší magický dátum je 17.06.2345**. To si ešte počkáme.

Bodovanie:

správny výsledok – 2b.; správne určenie, ktoré cifry potrebujeme na deň a mesiac – 1b.; vysvetlenie postupu – 2b.

Úloha M2: Mapa – *Opravoval Matej Moško*

Na stole bola mapa krajiny, ktorá vyzerala ako tabuľka 2 × 5 políčok. Každé políčko bolo vyfarbené jednou z troch farieb podľa toho, koho to bolo územie. Pritom však žiadne dve políčka, ktoré mali spoločnú stranu, nemali rovnakú farbu. **Koľkými rôznymi spôsobmi mohla byť tabuľka vyfarbená?**

Máme tabuľku 2×5 políčok a 3 rôzne farby, ktoré si označme číslami 1, 2 a 3.

Prvá dôležitá vec, ktorú si musíme uvedomiť je, že nemusíme nutne použiť všetky tri farby v jednej mape. Podmienke, že dve rovnaké farby nesmú mať spoločnú stranu, vyhovuje predsa aj takáto mapa:

1	2	1	2	1
2	1	2	1	2

Teraz sa pozrime na našu tabuľku 2×5 a spýtajme sa : *Koľko možností máme na vyplnenie prvého stĺpca?* Na prvé políčko v prvom stĺpci môžem dať tri rôzne farby. Na druhé políčko už môžem dať len dve rôzne farby (jednou som vyfarbil prvé políčko).

Takže ak na prvé políčko mám tri možnosti ofarbenia a na druhé políčko dve možnosti, mám $3 \cdot 2 = 6$ možností. Pozrime sa teraz na štyri zvyšné stĺpce.

Položíme si ďalšiu otázku: *Keď už máme prvý stĺpec vyplnený, koľko máme možností na vyplnenie stĺpca vedľa neho?*

V prvom stĺpci máme niektoré dve farby, povedzme napríklad, že 1 a 2. A teraz k nim jednoducho dopíšeme všetky možnosti stĺpca, ktorý vyfarbujeme vedľa.

1	2
2	1

1	3
2	1

1	2
2	3

Teda na prvý stĺpec máme 6 možností a na každý ďalší 3. Keďže takto musíme vyplniť 5 stĺpcov, tak sa to dá spraviť $6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 486$ spôsobmi.

Bodovanie:
určenie možností pre prvý stĺpec – 2b.; určenie možností pre ďalší stĺpec – 2b.; zistenie, že medzi sebou treba stĺpce ďalej násobiť tým istým číslom – 1b.; ak výsledok nebol správny, udeľoval som čiastkové body za jednotlivé časti postupu, takto sa dali získať maximálne 3b.

Úloha M3: Čudákova úloha – *Opravovali Michaela „Jerry“ Dlugošová Michaela „Miška“ Ždímalová*

Starý čudák mal rád čudné čísla. Povedal deťom, že číslo je čudné, ak naraz platí, že:
1. Je súčtom dvoch po sebe idúcich kladných celých čísel.
2. Je súčtom piatich po sebe idúcich kladných celých čísel.

Keď im vysvetlil, čo sú čudné čísla, opýtal sa ich: „**Koľko existuje čudných čísel menších ako 2017?**“

Pozrime sa najprv na 1. podmienku:
Ak máme dve po sebe idúce celé kladné čísla, jedno je párne a druhé nepárne (napríklad 2 a 3, 5 a 6). Ak sa zamyslíme nad ich súčtom, rýchlo zistíme, že bude vždy nepárny. Teda aby číslo mohlo byť čudné, musí byť nepárne.

Pozrime sa na 2. podmienku:
Vezmime najprv päť najmenších čísel a ich súčet: 1+2+3+4+5 = 15. Ďalšia možnosť by bola 2+3+4+5+6 = 20, nasleduje 3+4+5+6+7 = 25... Môžeme si uvedomiť, že ak vezmeme ďalších 5 čísel, dostaneme vždy súčet o 5 väčší než ten predtým (lebo každé číslo zväčšíme o jedna – dokopy sa súčet zväčší o päť). Postupnosť piatich za sebou idúcich celých čísel vieme zapísať ako $(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2) = n+n+n+n+n = 5 \cdot n$. Čudné číslo teda musí byť deliteľné piatimi. Všimnime si, že ho vieme zapísať ako 5 „krát“ prostredné číslo postupnosti.

Každé čudné číslo je teda vždy nepárne a násobkom 5. Hľadáme však iba tie z nich, ktoré sú menšie ako 2017. Najbližším menším nepárnym číslom, ktoré je násobkom 5, je 2015, čo je súčet 401+402+403+404+405 (2015:5 = 403, čo zodpovedá prostrednému číslu v postupnosti).

Zaujímajú nás teda čudné čísla medzi 15 (lebo toto je najmenší možný súčet piatich po sebe idúcich prirodzených čísel) a 2015. Ide o čísla 15, 25, 35, 45 atď. Poďme zistiť, koľko ich je. Do 2015 máme 2015:5 = 403 násobkov. Keďže začíname číslom 5 a končíme číslom 2015, čo sú oba nepárne, tak nepárnych násobkov bude 202 a párnych 201. Ale medzi nepárnymi násobkami máme zarátané aj číslo 5, ktoré nevieme dostať ako súčet piatich po sebe idúcich celých kladných čísel. Nakoniec je to teda iba **201 čudných čísel**. Pozornému oku neunikne skutočnosť, že pred cifrou 5 je vlastne číslo udávajúce „poradie“ čudného čísla. **1**5 je prvé, **2**5 je druhé, **3**5 tretie a tak ďalej, až **201**5 je 201. čudné číslo.

Už nie je ťažké zistiť odpoveď na otázku – **čudných čísel menších ako 2017 je 201**.

Bodovanie:
správny výsledok – 1,5b.; dokázanie, že čudné čísla vždy končia cifrou päť – 3b.; postup, ktorým ste určili počet čudných čísel – 0,5b.

Úloha M4: Stavba – *Opravovali Kristína „Kika“ Prešinská*
Mariana „Marianka“ Hronská

Stavbári mali 11 palíc s týmito dĺžkami: 2 m, 3 m, 3 m, 3 m, 4 m, 5 m, 5 m, 5 m, 6 m, 6 m a 9 m. Chceli tieto palice použiť na vyskladanie niekoľkých trojuholníkov na zemi, ktoré budú tvoriť základne stanov. Už sa chceli pustiť do práce, keď dorazil hlavný stavbár a povedal im tieto stavebné zásady:

1. Na stavbu trojuholníkov nemusíte použiť všetky palice.
2. Palice nesmiete lámať.
3. Každá použitá palica musí byť súčasťou len jedného trojuholníka.
4. Každá použitá palica musí na obvode trojuholníka ležať celou svojou dĺžkou.
5. Strany trojuholníkov môže tvoriť ľubovoľný počet palíc.

Hlavný stavbár tvrdil, že sa z týchto konárov dajú naraz poskladať tri trojuholníky s rovnakým obvodom. **Mal hlavný stavbár pravdu? Aký najväčší obvod by také tri trojuholníky mali?**

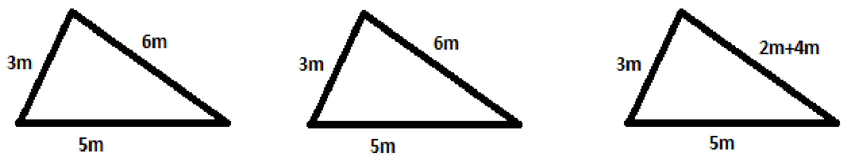
Úloha sa skladá z dvoch otázok. Ak však odpovieme na tú druhú, teda nájdeme tri trojuholníky s rovnakým a čo najväčším obvodom, tak automaticky zodpovieme aj na otázku, či sa dajú nájsť také tri trojuholníky, ktoré by mali rovnaký obvod.

Hľadáme tri trojuholníky s rovnakým, najväčším obvodom. Skúsme najskôr zapojiť do trojuholníkov všetky palice. Súčet dĺžok všetkých palíc je 51 m. Tento počet chceme rozdeliť medzi tri trojuholníky s rovnakým obvodom – na tri rovnaké časti. 51:3 = 17.

Aby sme však z palíc vytvorili trojuholník, potrebujeme, aby nám v ňom platila trojuholníková nerovnosť. Ak by sme použili najdlhšiu palicu, ktorá je dlhá 9 m, tak potrebujeme, aby súčet dĺžok palíc na ostatných dvoch stranách bol väčší ako 9 m, lenže to by nám dalo dokopy viac ako 18 m. Takže, nielenže vieme, že trojuholníky nemôžu mať obvod 17 m (lebo na to by bolo potrebné použiť všetky palice), ale aj to, že 9 m palicu nevieme použiť kvôli trojuholníkovej nerovnosti. Takže budeme stavať trojuholníky bez palice dlhej 9 m.

Vezmime si teda celkovú dĺžku palíc bez tej najdlhšej: 51–9 = 42. Zase si tento celkový počet chceme rozdeliť medzi tri trojuholníky s rovnakým obvodom – na tri rovnaké časti. 42:3=14.

Teraz máme najdlhšiu palicu, ktorá je dlhá 6 m. Žiadaný obvod 14 m dostaneme vtedy, keď spolu s najdlhšou palicou použijeme palice dokopy 8 m dlhé. To našťastie vieme za pomoci našich palíc docieliť aj bez porušenia trojuholníkovej nerovnosti. Poďme si poskladať trojuholníky s obvodom 14 m. Je to možné napríklad týmto spôsobom:

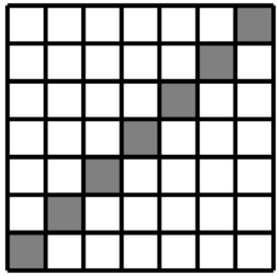


Vieme, že na poskladanie trojuholníka môžeme použiť ľubovoľný počet palíc, takže si vieme jednu stranu poskladať z 4 m a 2 m palice.

Týmto sme sa dopracovali k odpovedi, že **hlavný stavbár neklamal a naozaj to ide. Najväčší obvod jedného trojuholníka môže byť 14 m**.

Bodovanie:
poskladanie trojuholníkov s rovnakým obvodom – 1b.; dôkaz, že obvod trojuholníkov nemôže byť 17 m – 2b.; ukázanie, že najväčší obvod je 14 m a konkrétne poskladanie trojuholníkov s týmto obvodom – 2b.

Úloha M5: Predpoveď – *Opravovali Juraj „Juro“ Pavlovič*
Svetlana Rampašeková



Veštec sa zamyslel a potom povedal: „Predstav si, že by som nakreslil do hliny tabuľku rozmerov 7 × 7. Do každého políčka by som potom napísal jedno číslo od 1 do 7, tak, že by celkovo bolo v tabuľke 7 jednotiek, 7 dvojok, ... 7 sedmičiek. Aby som dodal tabuľke magické schopnosti, napísal by som do nej čísla symetricky podľa uhlopriečky vyznačenej šedou farbou. Teda napríklad ak by som dal jednotku do ľavého horného rohového políčka, musel by som ju dať aj do pravého spodného rohového políčka. Súčet čísel na tejto uhlopriečke by ti potom dal odpoveď na tvoju otázku!“ **Aký je súčet čísel na uhlopriečke, ktorá je vyznačená šedou farbou?**

Symetria podľa uhlopriečky sa týka všetkých bielych políčok a prikazuje nám, že keď na niektoré biele políčko umiestnime číslo, musíme ešte jedno také isté číslo umiestniť aj symetricky na „opačnú stranu“ podľa uhlopriečky. To vlastne znamená, že na biele políčka môžeme čísla umiestňovať akoby vždy iba po dve rovnaké naraz. Inými slovami: na biele políčka môžeme umiestniť z každého čísla jedine párny počet kusov, čiže 0, 2, 4, alebo 6.

Takže zo žiadneho čísla sa nám nepodarí všetkých 7 kusov „napratať“ iba na biele políčka, z každého čísla nám niekoľko kusov zvýši. Neostáva nám iné, ako tieto zvyšné čísla umiestniť priamo na sivú uhlopriečku – pretože tam nepotrebujú onú „symetrickú dvojicu“. No a keďže máme sedem rôznych čísel, z ktorých z každého nám niekoľko kusov zvýši, a na uhlopriečke máme práve 7 políčok, tak je jasné, že z každého čísla nám musí ostať práve jeden kus – to je jediný spôsob, ako sa tam všetky pomestia. Tým pádom na uhlopriečku umiestnime z každého čísla jeden kus, teda 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. **Súčet na uhlopriečke je 28.**

Celkom na záver sme však ešte povinní preveriť, či sa naozaj čísla do tabuľky dajú usporiadať tak, ako to zadanie vyžaduje. Stačí na to ľubovoľné vyhovujúce umiestneni čísel, napríklad ako tu na obrázku.

4	1	3	1	2	5	3
5	6	7	6	2	6	5
7	2	4	3	1	2	2
1	5	4	4	3	6	1
3	6	2	4	4	7	3
7	5	6	5	2	6	1
7	7	3	1	7	5	4

Bodovanie:
úplne správne riešenie – 5b.; správne riešenie, ale chýbajúce vysvetlenie, prečo z každého čísla zvýši práve jeden kus – 4b.; správny výsledok, ale zistený iba na jednom konkrétnom vyplnení tabuľky – 2,5b.

Organizátor korešpondenčného seminára Pikomat