Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

35. ročník www.pikomat.sk školský rok 2017/2018

Vzorové riešenia 3. série, kategória 5–7

Úloha M1: Prevoz – *Opravoval Peter „Bubu" Onduš*

Aby sa vojaci vedeli lepšie rozoznávať, boli očíslovaní číslami od 1 do 1000. Vojaci boli síce všetci v jednej armáde, no niektorí sa nemali radi. Zhodou okolností to vyšlo práve tak, že žiaden vojak nemal rád vojakov s číslami, ktoré boli celočíselným násobkom jeho čísla. Očíslovaní vojaci mali byť umiestnení do vozov na presun, avšak v žiadnom voze nesmel byť ani jediný vojak, ktorého by niektorý iný vojak v tomto voze nemal rád. **Koľko najmenej vozov bolo potrebných?**

Ak budeme trochu skúšať, koľko vozov potrebujeme na prevoz, pomerne rýchlo prídeme na to, že **minimálny počet vozov bude desať**. Poďme si skúsiť ukázať, prečo to tak je.

Prvým dôležitým krokom je ukázať, že ak by sme mali deväť vozov, tak v nejakom voze musia byť dve čísla, ktoré sa nemajú rady.

Pozrime sa najprv na číslo 1. Toto číslo je špeciálne tým, že jeho násobkom sú úplne všetky ostatné čísla. Teda našou jedinou možnosťou je dať ho osobitne.

Ako ďalšie sa pozrime na čísla 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 a 512. Sú to také čísla, ktoré dostaneme, ak budeme postupne násobiť 2 dvomi (2·2·2·2…), hovoríme im aj mocniny dvojky.

Žiadne dve z týchto deviatich čísel nemôžu byť spolu v jednom voze, pretože väčšie z nich sú vždy celočíselným násobkom tých menších. Týchto čísel je ale deväť, a teda na ich umiestnenie potrebujeme deväť vozov. Ale to už je spolu s vozom, kde je číslo 1, desať vozov. Teda nám určite nestačí na prevoz deväť vozov.

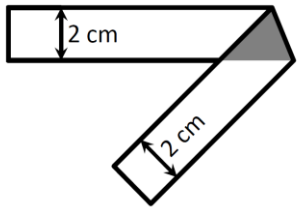
Teraz už len stačí nájsť spôsob, akým sa dajú vojaci naložiť do 10 vozov. Existuje ich viacero, ukážme si jeden z nich. Vieme, že v prvom voze bude 1, v druhom 2, v treťom 4, atď. Ak do jednotlivých vozov doplníme všetkých vojakov, ktorí majú číslo väčšie ako vojak, ktorý tam už je a menšie ako ten, ktorý je v ďalšom vozni, dostaneme vozy s vojakmi: |1| 2, 3| 4, 5, 6, 7| 8, 9, 10, …, 15| 16… 31| 32 … 63| 64 … 127| 128 … 255| 256 … 511| 512 … 1000|. Všimnime si, že v každom voze je najväčšie číslo v danom voze menšie, ako dvojnásobok najmenšieho čísla v tomto voze. To znamená, že aj najmenší násobok najmenšieho čísla vo voze je väčší ako najväčšie číslo vo voze. Teda vojaci si určite vzájomne neprekážajú.

Ukázali sme teda, že 9 vozov nám nestačí, ale desať už áno, a preto môžeme tvrdiť, že **minimálny počet potrebných vozov bude desať.**

Bodovanie:
za poznatok, že na prepravu vojakov treba 10 vozov - 1b.; za dôkaz, že vojakom nestačí 9 vozov – 2,5b.; za spôsob ako do 10 vozov naložiť vojakov a dôkaz jeho funkčnosti – 1,5b.

Poznámka:
Pri úlohách ako je táto je dôležité ukázať, že nám určitý počet vozov nestačí a následne už iba stačí nájsť takú situáciu, kde je ich o jeden viac a zadaniu sme vyhoveli. Až vtedy sme skutočne ukázali, že sme našli najmenší možný počet vozov. Väčšina z Vás ukázala, že to pre desať vozov spraviť vieme, ale nie to, že deväť nám nestačí.

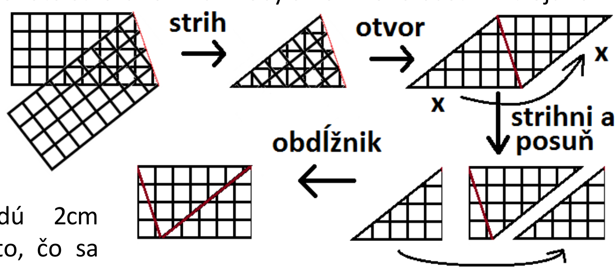
Úloha M2: Pásiky papiera – *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková*

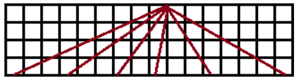


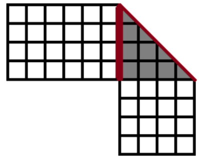
Betka našla kopu veľmi dlhých pásikov papiera, na ktoré si vojaci písali odkazy a rozkazy. Všetky mali šírku 2 cm. Betka ich začala po jednom zohýbať tak, že prekrývajúce sa časti vždy tvorili trojuholník (na obrázku šedý). Betka chytila nožnice, a z každého zohnutého papierika odstrihla oba prečnievajúce konce (na obrázku biele). Zvyšok rozložila, takže jej vznikol štvoruholník. Pozrela sa naň a pomyslela si: „Škoda, že tie pásiky nie sú zo štvorčekového papiera, hneď by som vedela, ktorý štvoruholník má najmenší obsah." **Pomôžte Betke zistiť, ako by vyzeral štvoruholník s najmenším obsahom a aký by tento obsah bol.**

Betka hovorí, že by jej pomohol štvorčekový papier, tak to s ním poďme vyskúšať aj my. Ja som si zobral papier s polcentimetrovými štvorčekmi, takže môj pásik má šírku 4 štvorčeky. Prvé, na čo ste určite prišli, keď ste si z pásika vystrihli takýto trojuholník, bolo, že jeho obsah sa nám asi bude zisťovať ťažko, vznikne nám málo celých štvorčekov, a rôzne divne osekané kúsky... Ale keď si ho rozložíme naspäť z dvojvrstvového trojuholníka na jednovrstvový štvoruholník, už to pôjde lepšie.

Všimnime si, že keď ten trojuholník rozkladáme na štvoruholník, strany, ktoré boli predtým na sebe (takže sú rovnako dlhé, na obrázku označené X) teraz ležia vedľa seba. To sa nám ešte zíde. Ako zistíme obsah takéhoto štvoruholníka? Keby sme z neho odstrihli trojuholník ako na obrázku, a presunuli ho na druhú stranu, dostali by sme obdĺžnik. A obsah obdĺžnika zrátame ľahko – dĺžka krát šírka. Šírku poznáme – to je predsa šírka pásika, teda vždy to budú 2cm (4 štvorčeky). Dĺžka je práve to, čo sa mení, keď rôzne zohýbame pásik. Napríklad na mojom obrázku je to približne 6,4 štvorčeka. Dĺžka takéhoto obdĺžnika je práve to X, ktoré sme si označili pred chvíľou, že je rovnako dlhé ako dĺžka tej šikmej strany. Keď chcem nájsť najmenší obsah, stačí mi nájsť najkratšiu možnú túto šikmú stranu, no nie?







Ani nemusím dlho premýšľať, nakreslím si pár možných čiar idúcich z jednej strany pásika na druhú, a je jasné, že najkratšia je vtedy, keď ide priamo kolmo dole. Vtedy má dĺžku 2cm, tak ako je šírka pásika, a keď by som ju vychyľoval na jednu alebo druhú stranu, bola by len dlhšia. Takže najmenší možný obsah je v takomto prípade, ako na obrázku – „šikmá strana" je naznačená hrubou, a ide kolmo na kraje pásika, potom štvoruholník, čo vznikne po rozložení je štvorec 2×2, takže má obsah 4cm^2.

Bodovanie:

za výsledok 1,5b. najviac +1b. za postrehy

pri riešení cez obsah obdĺžnika: za myšlienku, že obsah záleží len od dĺžky, keďže všetky štvoruholníky majú rovnakú výšku – 4b.; za ukázanie, že šírka obdĺžnika je vždy rovnaká – 0,5b.; za ukázanie, prečo je najkratšia možná dĺžka 2cm – 0,5b.

Úloha M3: Armáda – *Opravovali Juraj Jankovich a Ľudmila „Ľudka" Šimková*

Počet vojakov v celej armáde je 6-ciferné číslo. Peter si všimol, že je deliteľné 7, 11 aj 13. Betka je veľmi múdra, a tak vyhlásila, že prvá a štvrtá cifra musia byť rovnaké, že druhá a piata cifra musia byť rovnaké a dokonca že aj tretia a šiesta cifra musia byť rovnaké. **Mala Betka pravdu? Prečo?**

Na začiatok zistíme, aké čísla sú deliteľné číslami 7, 11 aj 13. Siedmaci by už mali vedieť, že najmenšie nájdeme, keď ich vynásobíme (keďže 7, 11, 13 nemajú žiadneho spoločného deliteľa, lebo sú to prvočísla). Ale aj piataci a šiestaci, ktorí tento trik ešte nepoznajú, takéto číslo ľahko nájdu. Skúšam postupne násobky čísla 13, či sú deliteľné napríklad 11-timi. ~~13~~, ~~26~~, ~~39~~, ~~52~~, ~~65~~, ~~78~~, ~~91~~, ~~104~~, ~~117~~, ~~130~~, **143**. Všimnime si, že je to práve jedenásty násobok čísla 13 (t.j. 11·13), ktorý je deliteľný aj 11-timi, aj 13-timi. Keď k tomu chceme pridať aj deliteľnosť sedmičkou, skúšame ďalej násobky tohto čísla, či sú deliteľné siedmimi. ~~143~~, ~~286~~, ~~429~~, ~~527~~, ~~715~~, ~~858~~, **1001**. Opäť je to práve siedmy násobok tohto čísla (t.j. 7·143 = 7·11·13), teda číslo 1001, ktorý je deliteľný aj sedmičkou.

Keď by sme takto pokračovali ďalej, zistili by sme, že aj ďalšie čísla, ktoré sú deliteľné aj 7, aj 11, aj 13, sú ďalšie násobky čísla 1001. Takže číslo, ktoré je deliteľné číslami 7, 11 aj 13, je určite deliteľné aj číslom 7·11·13=1001.

Zadanie však ešte hovorí, že to bolo šesťciferné číslo, a určite sa nám nechce po jednom vypisovať a overovať všetky šesťciferné násobky čísla 1001. Nájdeme si preto vlastnosť, ktorá platí pre všetky z nich a pomôže nám. Ak je šesťciferné číslo deliteľné číslom 1001, podiel pri tomto delení bude určite trojciferný. Prečo? Lebo aj pri najväčšom možnom – 999999 je podiel trojciferný 999999÷1001=999, a aj pri najmenšom deliteľnom – 100100 je podiel trojciferný 100100÷1001=100. Trojciferný podiel ??????÷1001 si môžeme označiť ako číslo s ciframi ABC. Keď potom urobíme skúšku správnosti tohto delenia, dostali by sme pôvodné číslo. ABC·1001=?????? (každý ? predstavuje jednu cifru).

Tak si to roznásobíme – viď výpočet v rámčeku – a dostávame číslo v tvare ABCABC – a to je presne to, čo sme chceli ukázať.

$$
\begin{array}{r}
\mathrm{ABC} \\
\times \quad 1001 \\
\hline
\mathrm{ABC} \\
000 \\
000 \\
\mathrm{ABC} \\
\hline
\mathrm{ABCABC}
\end{array}
$$

Ukázali sme si, že ak je číslo deliteľné číslami 7, 11 aj 13, tak je deliteľné číslom 1001. A že každé šesťciferné číslo, ktoré je deliteľné číslom 1001 (resp. je násobkom čísla 1001), má cifry v tvare ABCABC. Takže môžeme potvrdiť, že Betka mala pravdu.

Bodovanie:
za určenie, že Betka má pravdu – 0,5b.; za nájdenie a povedanie, že 1001 je najmenší spol. násobok čísel 7, 11 a 13 – 1b.; odôvodnenie, prečo má Betka pravdu – 2,5b.; za rozpísanie podrobností – 1b.

Úloha M4: Krádež – *Opravovala Zuzana „Bum" Bogárová*
Deti sa od Robina dozvedeli, že muži v jeho armáde buď vždy hovoria pravdu alebo vždy klamú. Niekedy je to pomerne nepraktické, napríklad teraz. Jeden muž ukradol veliteľov meč a podozrenie padlo na troch chlapov: Andrewa, Bena a Chrisa. Sú len tri miesta, kde sa dal meč bezpečne ukryť – do ohniska, medzi vozy alebo do bútľavého buku. Na začiatok každý z chlapov vyhlásil: „Ja som to nebol!" Potom pridali nasledovné výroky:
Andrew: „Bol to Ben a skryl meč do bútľavého buku."
Ben: „Meč je skrytý buď v ohnisku alebo v bútľavom buku."
Chris: „V ohnisku meč určite nie je."
Ktorý z troch vojakov ukradol meč a kam ho ukryl? Ako to mohli deti z ich výpovedí zistiť?

Na začiatok je fajn si spísať všetko čo vieme. Meč ukradol práve jeden z týchto troch mužov: Andrew, Ben a Chris. Mohol ho schovať na tri miesta: Ohnisko, medzi vozy a do bútľavého buku. Všetci povedali: „Ja som to nebol". Táto veta nám prezrádza veľmi dôležitú vec. A to, že iba jeden z nich klame, a to ten, ktorý meč ukradol. Ostatní hovoria pravdu. Vypíšme si ešte, vety ktoré každý z mužov povedal.

Andrew: „Bol to Ben a skryl meč do bútľavého buku."
Ben: „Meč je skrytý buď v ohnisku alebo v bútľavom buku."
Chris: „V ohnisku meč určite nie je."

Poďme teda zistiť, kto z nich klame. Najjednoduchšie riešenie je vyskúšať všetkých troch.

Ak by to spravil Chris, znamená to, že klame a ostatní hovoria pravdu. Ale potom by to podľa Andrewa musel byť Ben, a my vieme, že Ben to nebol. Tu máme spor, takže **Chris to určite neurobil**.

Ak by to spravil Ben, znamená to, že jeho výrok je nepravdivý. To značí, že meč by nebol v ohnisku ani v bútľavom buku. Lenže potom by sa podľa pravdu vraviaceho Andrewa meč nachádzal v bútľavom buku. Tu máme ďalší spor, pretože meč nemôže byť v bútľavom buku. Takže Ben musí hovoriť pravdu, a teda **Ben to neurobil.**

Z toho vyplýva, že **meč musel ukradnúť Andrew**. Pozrime sa či vieme zistiť, kam meč schoval.

Ak to spravil Andrew, tak potom klame. Jeho výrok, že Ben ukradol meč a schoval ho do bútľavého buku je nepravdivý. Keďže Chris hovorí pravdu, vieme, že **meč v ohnisku nie je**. A pretože aj Ben hovorí pravdu, **meč je buď v ohnisku alebo v bútľavom buku**. Z toho nám vyplýva, že **meč je v bútľavom buku**. Nenarazili sme tu na žiadny spor.

Bodovanie:
za správne vyhodnotenie, že klamať môže iba jeden – 2b.; za správne riešenie – 1b.; ak ste sa pozreli na všetky možnosti – 2b.

Úloha M5: Kamienková hra – *Opravovali Fedor Župník Jarmila „Jarka“ Šimková*

Betka našla malú hraciu dosku veľkosti 3 × 3 a k nej 6 červených a 3 modré kamienky. Tieto kamienky chcela najprv umiestniť tak, aby ani v jednom riadku, stĺpci alebo uhlopriečke neboli všetky kamienky červené. Toto ju po chvíli omrzelo, a tak začala skúšať, či sa jej podarí kamienky poukladať tak, aby ani v jednom riadku, stĺpci alebo uhlopriečke neboli všetky kamienky rovnakej farby. **Podarí sa jej spraviť prvú a druhú možnosť? V oboch prípadoch napíš buď ako by to spravila, alebo prečo sa to nedá.**

Pozrime sa najprv na prvú časť úlohy. Aby neboli v žiadnom riadku ani stĺpci samé červené kamienky, musí byť v každom riadku a stĺpci aspoň 1 modrý kamienok. Keďže máme 3 modré kamienky, tak v každom riadku musí byť práve 1 modrý kamienok. Ak by sme do jedného riadku dali dva modré kamienky, nejaký riadok by musel byť vyplnený iba červenými kamienkami a to nechceme. To isté platí aj o stĺpcoch. Rozoberme si teda možné rozostavenia modrých kamienkov:

M	Č	Č
Č	M	Č
Č	Č	M

M	Č	Č
Č	Č	M
Č	M	Č

Č	M	Č
M	Č	Č
Č	Č	M

Č	M	Č
Č	Č	M
M	Č	Č

Č	Č	M
M	Č	Č
Č	M	Č

Č	Č	M
Č	M	Č
M	Č	Č

Takže kamienky sme si rozostavili tak, aby v každom stĺpci a riadku bol práve 1 modrý kamienok. Lenže podľa zadania si musíme všímať aj diagonálu. Vidíme, že iba v 1. a 6. možnosti nám červené kamienky neutvoria celý riadok/stĺpec/diagonálu. Existujú teda 2 možnosti ako vyriešiť prvú časť úlohy. Podmienku, aby červené kamienky netvorili riadok/stĺpec/diagonálu sme teda splnili.

Teraz sa pozrime na druhú časť. Ak nemajú byť v riadku, stĺpci či diagonále kamienky rovnakej farby, znamená to, že musí byť splnená aj prvá časť úlohy. Lebo inak by niekde boli tri červené kamienky tvoriace riadok/stĺpec/diagonálu. Keď sa však pozrieme na riešenia prvej časti úlohy, vidíme, že v oboch prípadoch tvoria modré kamienky celú diagonálu. Teda druhú časť úlohy nevieme splniť.

Bodovanie:
nájdenie rozostavenia pre 1. podmienku – 3b.; vysvetlenie prečo sa nedá 2. podmienka – 2b.

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat