Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

35. ročník www.pikomat.sk školský rok 2017/2018

Vzorové riešenia 4. série, kategória 5–7

Úloha M1: Kuchársky turnaj – *Opravovali Erik Řehulka a Martin Starovič*
Turnaja by sa zúčastnilo 9 najlepších kuchárov z okolia. Peter si to vedel dokonale predstaviť. Vždy by dvaja z nich bojovali, teda varili, proti sebe. Petra vtedy napadla zaujímavá úvaha, že po každom zápase by existoval kuchár, ktorého počet varení by bolo párne číslo. **Bola Petrova úvaha správna? Nezabudni svoju odpoveď odôvodniť.**

Na začiatku turnaja má každý kuchár svoj počet varení 0. Teda celkový počet varení všetkých kuchárov je tiež 0. Dôležité je uvedomiť si, že je to párne číslo. Keď dáme ľubovoľných dvoch kuchárov bojovať proti sebe, tak celkový počet varení všetkých kuchárov sa zvýši o 2 (každému z nich sa zvýši o 1). Na to, aby Petrovo tvrdenie nebolo pravdivé, muselo by platiť, že celkový počet varení všetkých kuchárov je nepárne číslo. Je to tak preto, lebo máme 9 kuchárov, čo je nepárny počet. Ak neexistuje kuchár s párnym počtom varení, tak potom celkový počet varení je súčtom deviatich nepárnych čísel, a to bude vždy číslo nepárne.

Avšak celkový počet varení sa môže zvýšiť po každom zápase len o 2, ako sme už ukázali. Na začiatku bol počet varení párny. A keďže dvojka je párne číslo, po prvom zápase sčítavame dve párne čísla, a teda výsledkom bude vždy párne číslo. Po každom ďalšom zápase však opäť iba pridávame párne číslo 2, a teda opäť vždy dostaneme iba párne číslo. A teda nikdy nemôže nastať, že by bol nepárny celkový súčet, takže sa nemôže stať, že by mali všetci deviati naraz nepárne počty. To znamená, že počet varení aspoň jedného kuchára je určite párny a **Peter má pravdu**.

Bodovanie:
za správny výsledok – 2b.; za kompletný dôkaz – 3b.

Úloha M2: Výzvedy – *Opravoval Fedor Župník*
Vrchná časť hradu mala tvar pravidelného päťuholníka, vo vrcholoch ktorého sa nachádzali siene, pospájané dookola chodbami. Strážca vyrazil zo strážnej siene dookola (čiže akoby po stranách päťuholníka) takou rýchlosťou, že prejsť zo siene do siene mu trvalo presne 1 minútu. Deti vyrazili tiež zo strážnej siene po obvode päťuholníka, ale opačným smerom, aby neboli podozriví. **Akými rýchlosťami môžu deti ísť, teda ako dlho im má trvať prejsť jednu chodbu, aby stretli strážcu v jednej zo siení? A čo v prípade, keby mala vrchná časť hradu tvar pravidelného 18-uholníka?**

Začíname v tom istom bode ako strážca, pričom jeho rýchlosť je 1 chodba za minútu. Chceme vedieť, aký čas trvá prejsť **1 chodbu** nám. Najprv sa pozrime, ako by sme museli ísť, ak by sme sa s ním chceli stretnúť najprv v prvej sieni, do ktorej dorazíme. Potrebujeme 1 chodbu prejsť za taký čas, za ktorý strážnik prejde všetky ostatné. Tie sú 4 teda mu to bude trvať štyri minúty. Musíme teda prejsť 1 chodbu za **štyri minúty**.

Ak sa chceme stretnúť v druhej sieni, do ktorej dorazíme, potrebujeme prejsť 2 chodby za čas, za ktorý strážnik prejde zvyšné 3 chodby. Máme teda prejsť 2 chodby za tri minúty, teda na jednu chodbu máme 3/2 minút, alebo **jednu a pol minúty**. V tretej sieni, do ktorej prídeme sa stretneme so strážnikom po takom čase, za ktorý on prejde všetky zvyšné 2 chodby. Potrebujeme teda prejsť 3 chodby za dve minúty, čo znamená, že na jednu chodbu máme **2/3 minúty**. Do poslednej siene sa dostaneme prejdením štyroch chodieb, a to v čase, za ktorý prejde strážnik zvyšnú chodbu. Naša rýchlosť je teda štyri chodby za minútu, teda na jednu chodbu máme **1/4 minúty**.

Teraz k osemnásťuholníku. Čo sme si zatiaľ všimli?

Keď prechádzame x chodieb na n-uholníku (napríklad tri chodby na sto-uholníku), musí strážnik prejsť za ten čas $(\boldsymbol{n-x})$ chodieb (teda napríklad 100-3, čo je 97 chodieb). Tým pádom sa so strážnikom stretneme v x-tej miestnosti, ktorú navštívime.

Týchto $(n-x)$ chodieb musí strážnik prejsť za $(n-x)$ minút. Teda my musíme prejsť za rovnaký čas našich x chodieb, aby sme tam dorazili zároveň so strážnikom.

To znamená, že ak strážnik prejde 1 chodbu, my musíme prejsť zvyšných (n - 1) chodieb za 1 minútu. Ak prejde 2 chodby, musíme prejsť (n – 2) chodby za 2 minúty, ak ide do tej ďalšej, potrebujeme prejsť (n – 3) chodby za 3 minúty a tak ďalej. Poďme teda spočítať, ako rýchlo musíme chodiť pre osemnásťuholník.

Ak sa chceme stretnúť v prvej sieni, musíme prejsť 1 chodbu za (18-1) minút, teda naša rýchlosť je 1 chodba za **sedemnásť minút**. Ak prechádzame dve chodby za (18 - 2) minút, naša rýchlosť bude potom 2 chodby za šestnásť minút, čiže 1 chodba za **osem minút**. Takto pokračujeme ďalej a dopracúvame sa postupne k nasledovným hodnotám:

Koľko prejdeme chodieb	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***16***	***17***
Koľko chodieb prejde strážnik = čas v minútach	***17***	***16***	***15***	***14***	***13***	***12***	***11***	***10***	***9***	***8***	***7***	***6***	***5***	***4***	***3***	***2***	***1***
Koľko minút máme na 1 chodbu	$\frac{17}{1}$	$\frac{16}{2}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{17}$

Čitateľ zlomku, ktorý vyjadruje našu rýchlosť, je pri prvej sieni 17 a pre každú ďalšiu sieň vždy klesá o jedna. Menovateľ zase začína na hodnote 1 a pre každú novú sieň rastie o jedna. Keby sme teda všeobecne mali n-uholník, čitatele by šli postupne od n po 1 a menovatele zase naopak od 1 po n.

Bodovanie:

spočítanie časov pre päťuholník – 3b.; pre osemnásťuholník – 2b.; poprípade všeobecné riešenie s vysvetlením – 5b.

Úloha M3: Hádanka pre časostroj – *Opravovala Monika Machalová*

Deti prišli z júna 2018, kam sa chceli aj naspäť presunúť. Vybrali si preto každý nejaké dvojciferné prvočíslo. Následne medzi nimi prebehla táto konverzácia.

Betka: „Ak vy dvaja sčítate svoje čísla, tak dostaneme dátum, z ktorého sme prišli.“

Linda: „Ak vy dvaja sčítate svoje čísla, dostaneme dátum Dňa lastovičiek, ktorý je skôr v júni.“

Peter: „Ak vy dvaja sčítate svoje čísla, dostaneme dátum Dňa prísloví, ktorý je neskôr v júni.“ **Vie časostroj zistiť, ktoré čísla mali Peter, Betka a Linda?** Poznámka: Pod pojmom „dátum“ myslíme v tejto úlohe poradové číslo dňa v mesiaci. Napríklad pre „23. apríla 2018“ je poradové číslo dňa v mesiaci (teda „dátum“) rovné 23.

Deti povedali tri výroky:

- Čísla Petra a Lindy (P+L) dávajú dokopy deň, z ktorého prišli, takže stredný dátum.
- Čísla Petra a Betky (P+B) dávajú dokopy Deň lastovičiek, takže najmenší dátum.
- Čísla Lindy a Betky (L+B) dávajú dokopy Deň prísloví, takže najväčší dátum.

Každý z nich si myslí dvojciferné prvočíslo. Sčítaním každej dvojice z nich dostanú jeden z dátumov. Keďže je každý dátum iný, nikto z nich nemôže mať rovnaké číslo, lebo inak by boli dva dátumy rovnaké. Každý má teda iné prvočíslo. Hovoria o dňoch v mesiaci jún, ktorý má 30 dní, takže všetky prvočísla musia byť menšie ako 30. To sú: **11, 13, 17, 19, 23 a 29**.

Každý dátum dostanem súčtom dvoch prvočísel. Lenže nie všetky prvočísla sa dajú použiť. Pokiaľ sčítam číslo 29 hoci aj s najmenším z mojich čísel, dostanem 29+11=40, a toľko dní v júni nie je. Ak by som ho sčítala s niečím iným, dostala by som ešte väčšie číslo. To isté platí pre číslo 23, lebo 23+11=34. Preto si deti nemohli myslieť čísla 23 ani 29.

Rovnako nikto z nich nemôže mať číslo 19. Po sčítaní s číslom 11 dostaneme 19+11=30, čo funguje. Ale každé číslo zrátavam s každým (napr. Betkine aj s Lindou, aj s Petrom). Oba tieto súčty sú nejaký dátum, a teda nemôžu byť väčšie ako 30. Aj keby si zvyšní dvaja mysleli čísla 11 a 13, dve najmenšie, tak by to nesedelo, lebo síce 19+11=30, ale 19+13=32, čo je viac ako dní v júni.

Takže deti si myslia čísla 11, 13 a 17. Otázkou ale je, ktoré dieťa si myslí ktoré číslo.

Viem, že Deň lastovičiek (P+B) je skôr ako ich deň príchodu (P+L). To znamená, že P+B < P+L. V oboch sa nachádza P, takže to môžem vyškrtnúť. Dostanem, že **B < L**.

Rovnako viem, že Deň prísloví (L+B) je neskôr ako ich deň príchodu (P+L). To znamená, že P+L < L+B, teda že **P < B**.

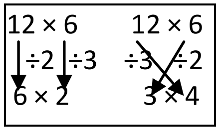
Keď si to dám dokopy, zistím, že **P < B < L**. Mám pre nich tri čísla, čiže už viem, kto bude mať ktoré: **Peter si myslel číslo 11, Betka číslo 13 a Linda číslo 17**.Odpoveď je preto áno, časostroj vedel zistiť, aké čísla si mysleli deti.

Bodovanie:
správny výber prvočísel – 1b.; dôvod prečo 19 nie – 1,5b.; určenie, kto si myslí ktoré číslo – 1,5b.; odpoveď – 1b.

Úloha M4: Sebazničenie – *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík*
Na obrazovke sa objavil obdĺžnik. Načítavanie prebieha tak, že každých pár sekúnd sa dĺžka obdĺžnika zmenší na ½ predošlej šírky a šírka na ⅓ predošlej dĺžky. Po troch takých zmenšeniach mal obdĺžnik obsah 4 cm^2. **Aká bola jeho pôvodná dĺžka, ak pôvodná šírka bola 9 cm?**

Obdĺžnik sa zmenšuje tak, že **dĺžka sa zmenší na polovicu šírky, a šírka na tretinu dĺžky**. Teda rozmery sa tak trochu „vymenia“. Mnohí z vás rátali, ako keby sa dĺžka zmenšovala na polovicu dĺžky, a šírka na tretinu šírky. Výsledok to síce neovplyvnilo, ale nie je to úplne to isté, ten obdĺžnik bude vyzerať trochu inak, takže by ste mali napísať, že si môžete dovoliť to rátať aj tak, lebo výsledok to neovplyvní, a prečo. Ukážem to na jednoduchom prípade.

Zoberme si obdĺžnik 12×6 (lebo jeho strany sú deliteľné aj dvomi, aj tromi, tak sa mi to bude dobre ukazovať, ale rovnako to funguje pre akýkoľvek iný). Ak sa každý rozmer zmenší na polovicu, resp. tretinu samého seba, dostaneme po prvom zmenšení 6×2. Ak sa rozmery zmenia na polovicu, resp. tretinu toho druhého, tak ako bolo v zadaní, tak dostaneme 3×4.



V oboch pochopeniach je však rovnaké, že obsah sa zmenší na šestinu pôvodného obsahu – v mojej ukážke z $12 \times 6 = 72$ na $6 \times 2 = 3 \times 4 = 12$, a všeobecne $\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{3} = \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a \cdot b}{6} = \frac{S}{6}$, a toto je hlavná myšlienka, na ktorú ste mali prísť – **keď sa rozmery budú zmenšovať na polovicu a tretinu, obsah sa zmení na $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ pôvodného obsahu**.
OK, po troch takýchto zmenšeniach mal obdĺžnik obsah $4\,cm^2$, a keďže sme si povedali, že po zmenšení je obsah šestinový – teda pred zmenšením bol šesťkrát väčší, tak vieme dorátať, že pred tretím zmenšením mal $4\,cm^2 \cdot 6 = 24\,cm^2$, pred druhým mal $24\,cm^2 \cdot 6 = 144\,cm^2$ a pred prvým (teda úplne na začiatku) mal obdĺžnik obsah $144\,cm^2 \cdot 6 = 864\,cm^2$.

A keďže zo zadania vieme, že mal šírku 9 cm, a zistili sme, že mal obsah $864\,cm^2$, pôvodnú dĺžku vyrátame jednoducho $\frac{\mathbf{864\,cm^2}}{\mathbf{9\,cm}} = \mathbf{96\,cm.}$
Mnohí z vás to úlohu riešili priamym spôsobom – z pôvodnej šírky určíme dĺžku po prvom zmenšení (4,5 cm), z toho šírku po druhom zmenšení (1,5 cm), z toho dĺžku po treťom zmenšení (0,75 cm). Keď máme obsah a dĺžku, vieme dorátať

šírku malého obdĺžnika $\frac{4\ cm^2}{0{,}75\ cm} = \frac{16}{3} cm = 5,\overline{3}\ cm.$ A túto šírku naspäť zväčšujeme – pred tretím zmenšením to bola dĺžka 16 cm, pred druhým to bola šírka 32 cm a pred prvým dĺžka 96 cm. Toto je takisto dobrý postup.

Bodovanie:

1. spôsob: myšlienka, že jedno zmenšenie zmenšuje obsah 6-krát, aj s vysvetlením – 3b.; vyrátanie pôvodného obsahu – 1b.; slovný popis 1b.

2. spôsob: systém zápisu dĺžok a šírok a dorátanie po 0,75 cm – 3b.; dorátanie druhého rozmeru malého obdĺžnika – 1b.; dorátanie spätných krokov až po pôvodnú dĺžku – 1b.

Poznámka:

V oboch prípadoch ste mohli stratiť až 0,5-1 bod z vášho vysvetlenia hlavnej myšlienky, ak ste rátali s tým, že dĺžka sa zmenšuje na dĺžku a šírka na šírku (ak ste nevysvetlili, že si to môžeme dovoliť).

Úloha M5: Hádanka na námestí – *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková*

Na námestí stál učiteľ, ktorý dával úlohu svojim študentom. Dal im kartičky s číslicami, z ktorých poskladal tri čísla. Prvé sa skladalo z jednotky a štyroch dvojok, druhé z dvojky a štyroch trojok a tretie z jednotky, dvoch dvojok, jednej trojky a jednej štvorky. Deti tieto tri čísla sčítali a zistili, že ich súčet bol 98 765. Potom mali deti za úlohu poprehadzovať kartičky s číslicami v jednotlivých číslach (teda kartičky z prvého čísla museli ostať v novom prvom čísle, z druhého v druhom a z tretieho v treťom). **Dá sa aj sčítaním nových poprehadzovaných čísel dostať súčet 98 765? Ak áno, aké sú všetky možné trojice čísel ktoré mohli deti vytvoriť?** Poznámka: Na poradí čísel v trojici nám nezáleží.

Do tabuľky si napíšeme číslice čísel, ktoré deti sčítali. Keďže nepoznáme ani tieto tri čísla, poďme nájsť všetky trojice čísel so súčtom 98 765, ktoré sa dajú vyskladať z číslic v tabuľke. Potom budeme vedieť povedať, či mohli deti poprehadzovať číslice v číslach tak, aby sa ich súčet nezmenil.

Sada A	1	2	2	2	2
Sada B	2	3	3	3	3
Sada C	1	2	2	3	4

Napíšeme si naše tri neznáme čísla s ich súčtom pod seba. Súčet číslic na mieste jednotiek musí končiť 5-kou. Tu nám vystane otázka, či ten súčet musí byť 5 alebo by mohol byť i 15 či dokonca viac. Ak však sčítame najväčšie číslice z každej sady dostaneme 4 + 3 + 2 = 9. To znamená, že súčet na mieste jednotiek musí byť 5.

Zároveň sme tak zistili i to, že pri sčitovaní nikdy neprejdeme cez desiatku, pretože súčet troch číslic pod sebou môže byť najviac 9. Keď však pri sčitovaní pod seba v žiadnom kroku neprejdeme cez desiatku, súčet číslic pod sebou sa musí rovnať číslici na prislúchajúcom mieste pod nimi vo výsledku. Súčet číslic na mieste desiatok tak musí byť 6, na mieste stoviek 7, tisícok 8 a desaťtisícok 9.

Vypíšeme si všetky možnosti, ako môžeme z uvedených číslic dostať postupne súčty 9, 8, 7, 6 a 5.

	A	B	C
9	2	3	4
8	1	3	4
	2	3	3
7	1	2	4
	1	3	3
	2	2	3
	2	3	2
6	1	2	3
	1	3	2
	2	2	2
	2	3	1
5	1	2	2
	1	3	1
	2	2	1

Vidíme, že súčet 9 vieme dostať jediným spôsobom. Preto čísla musia začínať na 2, 3 a 4. Zo **sady A** sme použili číslicu 2, zo **sady B** číslicu 3 a zo **sady C** číslicu 4. Tieto číslice už nemôžeme znova použiť, tak si ich vyškrtnime z tabuľky.

Tým sme však vylúčili možnosť 1 + 3 + 4 na súčet 8 a zo zvyšných číslic vieme vyskladať už iba možnosť 8 = 2 + 3 + 3. Zo **sady A** sme teda použili ďalšiu číslicu 2. Zo **sady B** číslicu 3 a zo **sady C** číslicu 3.

Po vyškrtnutí týchto číslic nám na súčet 7 ostane len možnosť 2 + 3 + 2. Na súčet 6 nám ostali tri možnosti 1 + 3 + 2; 2 + 2 + 2; 2 + 3 + 1. Ku každej ostanú nepoužité zvyšné tri číslice so súčtom 5. Súčet 5 budú mať tieto tri číslice vždy, a to preto, lebo v pôvodných číslach to tak bolo, a použili sme predsa tie isté sady číslic. **Dostali sme tak tri trojice čísel, ktoré dávajú súčet 98 765:**

22 212	22 221	22 221
33 332	33 323	33 332
43 221	43 221	43 212

Bodovanie:
za nájdenie jedného riešenia – 1,5b.; za nájdenie každého ďalšieho riešenia – po 0,5b.; za vylúčenie prechodu cez desiatku – 0,5b.; za vypísanie možností pre jednotlivé súčty a vylúčenie tých, ktoré nemožno použiť – 2b.