Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 8–9

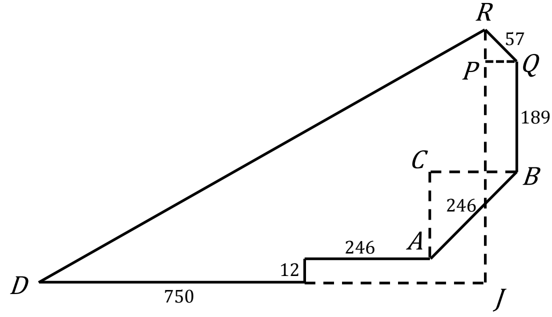
Úloha S1: Slovné inštrukcie – *Opravovali Jarmila „Jarka" Šimková Daniel „Danko" Kopf*

Drahý James, choď z bytu polovicu celkového počtu krokov na východ, potom choď 12 krokov na sever. Potom opäť na východ. Urob tretinu krokov, ktoré ti chýbajú do reštaurácie. Teraz zahni na severovýchod a prejdi polovicu zvyšného počtu krokov. Zostáva ti spraviť 189 krokov na sever a nakoniec 57 krokov na severozápad a si v reštaurácii. S prianím šťastnej cesty, tvoj papagáj Toby. James si však pomyslel: „To je ale potvora, ten Toby, však do tej reštaurácie vedie úplne priama cesta z môjho domu. Pôjdem tade, to bude najkratšie." **Koľko krokov musel James urobiť, ak išiel do reštaurácie priamou cestou?** Poznámka: Dĺžka Jamesovho kroku je vždy rovnaká.

Papagáj Toby zanechal Jamesovi 6 inštrukcií, koľko krokov ktorým smerom má spraviť. Zo všetkých bolo jasné, ktorým smerom sa má vydať, ale z niektorých sa James nedozvedel celkom priamo, koľko krokov má spraviť.

Štvrtá inštrukcia hovorila, aby spravil polovicu krokov, ktoré mu ešte chýbajú do reštaurácie. Z toho vyplýva, že v štvrtom úseku musel prejsť toľko krokov, ako v piatom a šiestom dokopy. Takže štvrtý úsek mal $189 + 57 = 246$ krokov. Tretia inštrukcia hovorila, aby spravil tretinu zvyšných krokov. To znamená, že počet krokov v treťom úseku je polovicou z počtu krokov v štvrtom, piatom a šiestom úseku dokopy. Tretí úsek má preto $(246 + 189 + 57)/2 = 246$ krokov. Prvá inštrukcia hovorí, že treba prejsť polovicu z celkového počtu krokov. To znamená, že počet krokov v prvom úseku sa rovná súčtu počtov krokov v ostatných úsekoch. Teda počet krokov v prvom úseku je $12 + 246 + 246 + 189 + 57 = 750$ krokov.

Kratšia cesta z domu do reštaurácie však vedie priamo. Počet krokov po tejto ceste vieme vypočítať Pytagorovou vetou ako dĺžku prepony DR pravouhlého trojuholníka DJR (obrázok), ktorého dĺžky odvesien síce nepoznáme, ale vieme si ich spočítať.



Na to budeme potrebovať rozdeliť každú inštrukciu na pohyb do hlavných svetových strán: sever (S), juh (J), východ (V), západ (Z).

Niektoré už v tomto tvare sú, ale smery na severovýchod (SV) a severozápad (SZ) potrebujeme do tohto tvaru previesť – úsečky AB a QR. Keď James kráča na V, a potom zmení smer na SV, otočí sa o $45°$. Takisto keď kráča na S a zmení smer na SZ. Z toho vyplýva, že pohyb na SV (resp. SZ) si vieme rozdeliť na dva rovnako dlhé pohyby smerom na S a smerom na V (resp. Z), ako je znázornené na obrázku rovnoramennými pravouhlými trojuholníkmi ABC a PQR. Teraz potrebujeme dopočítať dĺžky týchto pohybov pomocou Pytagorovej vety. Úsek AB má dĺžku 246 krokov, čo je zároveň aj prepona pravouhlého trojuholníka ABC. Dĺžka odvesny $AC = BC$ je teda $\sqrt{246^2/2}$. Úsek QR má 57 krokov, čo je zároveň prepona trojuholníka PQR. Dĺžka odvesny $PQ = PR$ je potom $\sqrt{57^2/2}$.

Teraz už len potrebujeme vypočítať dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka DJR. Dĺžku odvesny DJ vypočítame ako *„presuny na východ mínus presuny na západ"*, teda $|DJ| = 750 + 246 + \sqrt{246^2/2} - \sqrt{57^2/2}$. Dĺžku odvesny JR podobne „poskladáme" zo všetkých posunov na sever ako $|JR| = 12 + \sqrt{246^2/2} + 189 + \sqrt{57^2/2}$. Potom dĺžka prepony $|DR|$ sa rovná $|DR| = \sqrt{|JR|^2 + |DJ|^2} \cong 1203{,}5$ krokov. **James musel priamou cestou z domu do reštaurácie spraviť 1204 krokov.**

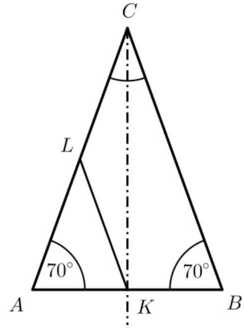
Bodovanie:

počty krokov v jednotlivých inštrukciách – 1b.; idea, ako vypočítať najkratšiu cestu – 1,5b.; zdôvodnenie, prečo sú trojuholníky ABC a PQR rovnoramenné – 0,5b.; výpočet dĺžok ramien (odvesien) – 1b.; správne dopočítanie – 1b.

Úloha S2: Cedulľka – *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková*

Ceduľka mala tvar trojuholníka. James si ho pomenoval *ABC* a keďže sa mu páčil jeho tvar, obkreslil si ho. Sadol si k blízkemu stolčeku a zostrojil os uhla *ACB*. Bod, v ktorom sa preťala os tohto uhla a úsečka *AB*, nazval *K*. Potom si zvolil bod *L* na úsečke *AC* tak, že 2 × |*LC*| = |*BC*|. Jamesa zaujímala veľkosť úsečky *LK*, ale vedel len to, že v jeho trojuholníku má uhol *ACB* veľkosť 40 stupňov, uhol *ABC* zase 70 stupňov a strana *BC* má dĺžku 4 cm. **Aká bola dĺžka *LK* a ako na to James prišiel?**

Poďme zistiť niečo viac o Jamesovom trojuholníku. Poznáme dva jeho vnútorné uhly, z ktorých ľahko dopočítame tretí. Veľkosť uhla BAC je $180° - 70° - 40° = 70°$. Keďže uhly BAC a ABC majú rovnakú veľkosť, trojuholník ABC je rovnoramenný s ramenami AC a BC dĺžky $4\ cm$. Os uhla na základňu rovnoramenného trojuholníka prechádza stredom strany (je zároveň aj výškou aj ťažnicou trojuholníka). Bod K je preto stred strany AB. Ďalej vieme, že $2 \times |LC| = |BC| = |AC|$, a teda L je stred strany AC.



Vznikol nám trojuholník AKL. Vieme o ňom, že $|AL| \cdot 2 = |AC|$, $|AK| \cdot 2 = |AB|$ a že má uhol LAK spoločný s trojuholníkom ABC. Trojuholníky AKL a ABC sú podobné podľa vety *SUS* v pomere 1:2. **Úsečka LK je polovica strany BC a teda má $2\ cm$.**

Úsečka LK sa nazýva *stredná priečka* trojuholníka ABC. Z podobnosti trojuholníkov AKL a ABC vieme ukázať, že je rovnobežná so základňou BC a je jej polovica. Keby sme dokreslili i zvyšné dve stredné priečky, rozdelili by nám trojuholník ABC na 4 zhodné trojuholníky so štvrtinovým obsahom.

Bodovanie:

zistenie, že $|\sphericalangle BAC| = 70°$ – 0,5b.; zistenie, že trojuholník ABC je rovnoramenný – 1b.; zistenie, že L je stred strany AC – 0,5b.; zistenie, že K je stred strany AB – 1b.; odôvodnenie, že LK je polovica z BC – 1,5b.; určenie, že $|LK| = 2\ cm$ – 0,5b.

Úloha S3: Kód zámku – *Opravovala Kristína „Kika" Prešinská*

Pre kód zámku platí: je to 6-ciferné číslo, nezačína nulou, obsahuje cifru 0, je deliteľný číslom 396, prvé a aj posledné dvojčíslie sú deliteľné číslom 9 a žiadna cifra netvorí polovicu svojho suseda. **Aký je kód na zámku?**

Hľadáme 6-ciferné číslo, označme si ho *abcdef,* pričom *a, b, c, d, e, f* sú jednotlivé cifry. Toto číslo musí byť deliteľné 396. Tým pádom musí byť deliteľné aj každým deliteľom čísla 396. Spravíme prvočíselný rozklad a dostaneme 396 = 2 · 2 · 3 · 3 · 11. Z toho vidíme, že *abcdef* musí byť deliteľné číslami 4 aj 9 súčasne, teda musí byť deliteľné 36. Okrem toho nám pravidlo deliteľnosti hovorí, že ľubovoľné číslo je deliteľné štyrmi práve vtedy, keď sú jeho posledné dve cifry deliteľné štyrmi. Takže posledné dve cifry *ef* sú deliteľné 4. Z ďalšej podmienky zo zadania ale vieme aj to, že *ef* je deliteľné aj 9. **Tým pádom aj číslo *ef* musí byť deliteľné 36.**

Skúsme nájsť *ef.* Kvôli deliteľnosti 36 prichádzajú do úvahy jedine 00, 36 alebo 72. Možnosti 00 a 36 však môžeme vylúčiť na základe inej podmienky: žiadna cifra netvorí polovicu svojho suseda (pričom 3 = 6/2 a 0 = 0/2). Zostala nám len jedna možnosť pre *ef,* a to *72*. Takže **odteraz pracujeme s číslom *abcd72*.**

Z deliteľnosti 396 vieme, že *abcd72* je deliteľné 9. Číslo je deliteľné 9 práve vtedy, keď je jeho ciferný súčet deliteľný 9. Taktiež vieme, že prvé dvojčíslie (*ab*), posledné dvojčíslie (*72*), aj celé číslo (*abcd72*) sú všetky deliteľné 9, a teda rovnako aj ich ciferné súčty. Nakoľko je *a+b+c+d+7+2* deliteľné 9, tak musí byť aj *(a+b+c+d+7+2) – (a+b) – (7+2) = (c+d)* deliteľné 9. **Prostredné dvojčíslie *cd* je deliteľné 9**.

Naše číslo *abcd72* musí obsahovať 0. Prvé aj prostredné dvojčíslie je deliteľné 9. Niektoré z nich teda musí byť v tvare *09* alebo *90*. (Nemôže to byť 00, lebo 0 = 0/2.) Ako môže vyzerať zvyšné dvojčíslie? Vieme, že je deliteľné číslom 9, teda jeho ciferný súčet je buď 9, alebo 18 (0 nemôže byť, pretože naše číslo nesmie obsahovať 00). Musí to byť niektoré z týchto: 09, 18, 27, 45, 54, 72, 81, 90, 99.

Tak ktoré dvojčíslie bude obsahovať tú „povinnú" nulu? Postupne overíme všetky možnosti. Prvé dvojčíslie nemôže vyzerať ako 09, pretože naše hľadané číslo je 6-ciferné. <u>Nech je naše prvé dvojčíslie 90</u>. Hľadané číslo je tvaru *90cd72* a potrebujeme, aby bolo deliteľné aj číslom 11 (lebo je deliteľné 396). Ľubovoľné číslo je deliteľné 11 vtedy, keď rozdiel súčtu cifier na párnych a nepárnych pozíciách je deliteľný 11. V našom prípade to znamená, že *(a+c+e) – (b+d+f)* je deliteľné 11. V tomto konkrétnom prípade máme *(9+c+7) – (0+d+2) = 14 + c – d* musí byť deliteľné 11.

<u>Ak by bol súčet *c+d = 9*</u>, tak tieto dve čísla si vieme označiť ako *c* a (*9–c).* Potom výraz *14 + c – d = 14 + c – (9 – c) = 5 + 2c.* A my potrebujeme, aby bol deliteľný 11. Jediné celé riešenie (*c* je len cifra, teda celé číslo od 0 do 9) je *c = 3*, a potom bude *d = 6.* Lenže dvojčíslie 36 mať nemôžme, pretože 3 je polovica zo 6. <u>Ak by bol súčet *c+d = 18*</u>, tak aj *c* aj *d*

musia byť $c = d = 9$, ale toto číslo by nebolo deliteľné 11. Ak by *cd* bolo 90 a hľadali by sme *ab*, tak na základe deliteľnosti 11 by sme úplne rovnako ako v predošlom prípade dospeli k tomu, že $ab = 36$, čo nevyhovuje.

Nech je cd = 09. Máme číslo *ab0972* a pozrime sa na deliteľnosť 11. Musí platiť (a+0+7) – (b+9+2) = a – b – 4 je deliteľné 11. Ak $a+b = 9$, tak tieto dve cifry si označme ako a a $(9–a)$. Potom musí byť $a – (9–a) – 4 = 2a – 13$ deliteľné 11. Jediné celé riešenie pre $a = 1$, vtedy má náš výraz hodnotu –11 a číslo –11 je deliteľné 11. Ak $a = 1$, tak $b = 8$ a naše hľadané číslo je 180972. Ak by $a+b$ bolo 18, tak aj a aj b je 9, ale vzniknuté číslo 990972 nie je deliteľné 11. **Jediným riešením je číslo 180972.**

Bodovanie:

posledné dvojčíslie je 72 – 2b.; prostredné dvojčíslie je deliteľné 9 – 1b.; aspoň jedno z dvojčísel má tvar 09 alebo 90 – 1b.; nájdenie riešenia 180972 a ukázanie, že je jediné – 1b.

Úloha S4: Hádanka – *Opravoval Martin „Logik" Lauko*

Mám štyroch kuchárov: Alfonsa, Manuela, Pierra a Toshikatsa. Povedali nám o sebe *v tomto poradí* tieto výroky:

Alfonso:	Pierre nie je z nás najhorší.
Manuel:	Jedno z prvých dvoch tvrdení je lož.
Pierre:	Som lepší ako Manuel.
Toshikatsu:	Som druhý najlepší.
Alfonso:	Som lepší ako Toshikatsu.
Manuel:	Tri tvrdenia z predošlých sú lži.
Pierre:	Tvrdenie po tomto bude lož.
Toshikatsu:	Manuel je lepší ako Alfonso.

Ako správni kuchári nám nepovedali celú pravdu, každý práve raz klamal. **Urči poradie kuchárov od najlepšieho po najhoršieho.**

V tejto úlohe vystupuje pomerne veľa rôznych výrokov (tvrdení), poďme si ich označiť. Alfonsove prvé tvrdenie označíme A1, druhé A2, Manuelove M1, M2, Pierrove P1, P2 a napokon Toshikatsuove T1, T2. Podľa zadania je vždy jedno z dvojice pravdivé a druhé nepravdivé (klamstvo). Ešte označme kuchárov A, M, P a T pozície v rebríčku kuchárov (1 = najlepší, 4 = najhorší). Takže ak by bol A lepší ako M, môžeme napísať A < M. Pravdivé tvrdenia budeme označovať *P*, nepravdivé *N*.

Všimnime si najskôr výrok M1: Jedno z tvrdení A1, M1 je lož. Musíme rozobrať dva prípady: M1 je buď *P*, alebo *N*. Ak je M1 pravda, potom musí byť A1 lož. Ak je M1 nepravda, potom nie je pravda, že (práve) jedno z tvrdení A1, M1 je lož. Takže buď nie je lož žiadne z nich, alebo sú lži obidve. Keďže ale predpokladáme, že M1 je *N*, tak musia byť nepravdivé obe, teda aj A1 je nepravdivé. V oboch prípadoch je A1 nepravdivé (nezávisle od pravdivosti M1). **Pierre je teda najhorší (P=4)**. Výrok A2 potom musí byť pravdivý a hovorí, že **A < T**.

Pokračujme výrokom P1 (P < M). Keďže už sme zistili, že Pierre je v skutočnosti najhorší, toto tvrdenie je jasná lož. Tým pádom musí byť jeho druhé tvrdenie (P2) pravdivé, a teda T2 je lož. Preto je **Alfonso lepší ako Manuel (A < M)** a tiež musí byť T1 pravdivé **(T=2)**.

Čiže pre poradie kuchárov musí platiť: P = 4; A < T; A < M; T = 2. Ďalej už ľahko overíme, že tieto štyri podmienky nám dávajú jedinú možnosť **A=1, T=2, M=3 a P=4**. Tu však ešte nemôžeme skončiť!

Zatiaľ sme totiž neuvažovali nad pravdivosťou výrokov M1, M2. Ak by boli napríklad oba nepravdivé, bolo by to v rozpore so zadaním úlohy a tým pádom by riešenie neexistovalo. Overme teda obidve možnosti: M1-*P*, M2-*N* alebo M1-*N*, M2-*P*. 1) M1-*P* je v poriadku, keďže A1 je *N*. Potom musí byť M2-*N*, teda nesmie byť pravda, že tri tvrdenia z prvých piatich sú nepravdivé. V našom prípade sú nepravdivé A1, P1, teda dve a tak M2 je nepravdivé. 2) M1-*N* znamená, že A1 aj M1 sú *N*. Tým pádom v prvej pätici budú nepravdivé A1, M1, P1 – teda tri a tak M2 je pravdivé. V oboch prípadoch vidíme, že všetky podmienky úlohy sú splnené, a tak je nájdené riešenie (A, T, M, P) správne a jediné. **Poradie kuchárov od najlepšieho po najhoršieho je: Alfonso, Toshikatsu, Manuel, Pierre.**

Bodovanie:
správne poradie kuchárov – 1b.; odvodenie riešenia z jednotlivých výrokov – 2b.; diskusia o pravdivosti Manuelových výrokov a ich vplyv na poradie – 1b.; slovný komentár – 1b.

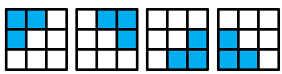
Úloha S5: Deka – *Opravoval Juraj „Juro“ Pavlovič*

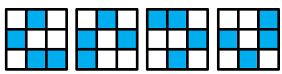
Deka bola ušitá z deviatich rovnakých štvorcových kusov látky, ktoré mali jednu stranu bielu a druhú čiernu. Alica kusy poukladala do mriežky 3 × 3 a zošila ich hranami, takže vznikla jedna veľká štvorcová deka. Alica Jamesovi povedala, že deky považuje za rôzne vtedy, keď sa jedna nedá dostať otáčaním ani prevracaním druhej (tj. deku chytíme a ľubovoľne ňou pohybujeme vo vzduchu). **Koľko *rôznych* diek vie Alica vytvoriť?**

Pravdaže, táto úloha sa dala vyriešiť aj postupným vypísaním všetkých možností. Nie je na tom nič nesprávne a kto takto našiel všetky deky a pridal aj vysvetlenie, ako pri hľadaní postupoval, zaslúžil si plný počet bodov. Avšak, povedzme si narovinu, spomedzi všetkých 256 možností takto „ručne“ povyberať presne tých správnych 70, ktoré sa navzájom neopakujú (nejakým otočením), to bolo hotové peklo!

Skúsme to trochu prefíkanejšie. Ale pekne poporiadku. Prečo 256 možností? Ak by sme deku vôbec neotáčali a pozerali sa iba na jednu jej stranu, tak vidíme 9 políčok, z ktorých každé môže byť biele, alebo čierne – teda 9 políčok a pre každé 2 možnosti. Takže z tohto pohľadu môžeme vidieť $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$ rôznych rozložení.

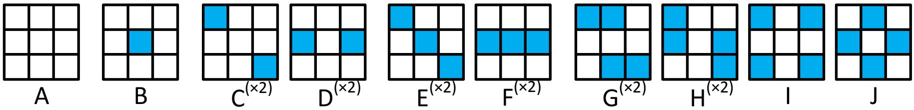
Lenže jedna deka obsahuje vždy dve rozloženia naraz – každé z jednej strany – a tak týchto 512 rozložení v skutočnosti predstavuje iba 512/2 = 256 možných diek. Aby sa nám neplietlo, čo je z ktorej strany, budeme sa zapodievať iba rozloženiami s 0, 1, 2, 3, alebo 4 čiernymi políčkami. Pretože ak nájdeme všetky deky s 0-1-2-3-4 čiernymi políčkami z jednej strany, tak tieto isté deky budú mať z druhej strany (v tomto poradí) presne 9-8-7-6-5 čiernych políčok, a teda sme pokryli úplne všetky prípady.


Obr. 1


Obr. 2

Takže máme 256 „rôznych“ (zatiaľ s úvodzovkami) diek. Lenže v týchto 256 dekách určite budú aj tieto 4 (Obr. 1), aj tieto 4 (Obr. 2), aj... Vari každá deka tam bude vyobrazená až 4-krát tá istá, len v inom otočení. Ale veď to je výborné – takže stačí počet 256 vydeliť 4 a dostaneme počet jedinečných diek, však?! Nuž, nie celkom, má to jeden háčik! **Čo s dekami, ktoré nemajú 4 rôzne otočenia?** Skúsme si ich najprv všetky nakresliť, potom uvidíme, čo s nimi spravíme.

Takže deky, ktoré pri otáčaní okolo stredu *nemajú* 4 rôzne polohy (pamätajme, že sa zaujímame iba o deky s 0-1-2-3-4 čiernymi políčkami). Vidíme ich na Obr. 3. Deky s 0 alebo 1 čiernym políčkom sú samozrejmosťou (Obr. 3 A-B). Dve čierne políčka musíme umiestniť súmerne podľa stredu, takže máme dve možnosti – do náprotivných rohov alebo stredov hrán (Obr. 3 C-D). Tri čierne políčka môžu jedine zopakovať situáciu ako pri dvoch čiernych, akurát pridáme to tretie do stredu (Obr. 3 E-F). Štyri čierne políčka môžu byť buď dve v rohoch a dve v stredoch hrán (Obr. 3 G-H), alebo všetky v rohoch alebo všetky v stredoch hrán (Obr. 3 I-J).



Obr. 3

Teraz skúsme tieto deky „odobrať bokom" z nášho celkového počtu 256. Musíme však dávať pozor. Deky A, B, I, J sa v celkovom počte (256) nachádzajú každá iba raz, to je OK. Avšak deky C–H sa v celkovom počte (256) nachádzajú každá dvakrát, pretože sa dajú otočiť práve dvoma spôsobmi. Tak teda odčítame 256 – 4 – (6·2) = 240.

Ostalo nám 240 diek, o ktorých máme istotu, že sa tam každá nachádza práve 4-krát taká istá, len v inom otočení. Takže už len vydelíme 240/4 = 60, pripočítame 10 diek, ktoré sme predtým „odobrali" a dostávame 60 + 10 = 70. **Alica vedela vytvoriť 70 *rôznych* diek.**

Bodovanie:

iba vykreslenie všetkých možností – 4b.; k tomu vysvetlenie systému zakresľovania – 1b.; pri menej ako 70 dekách – primerane menej bodov; akýkoľvek iný správny postup vedúci k správnemu výsledku – 5b.; myšlienka, že stačí robiť deky s 0–4 čiernymi políčkami – 1b.; za drobné chyby som strhával a za dobré myšlienky som pridával 0,5 až 1b.

Poznámka:

Deka s 0 štvorčekmi je iba jedna, deky s 1 štvorčekom sú 3, diek s 2 štvorčekmi je 10, diek s 3 štvorčekmi je 22 a diek s 3 štvorčekmi je 34. **Spolu 1 + 3 + 10 + 22 + 34 = 70.**