Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

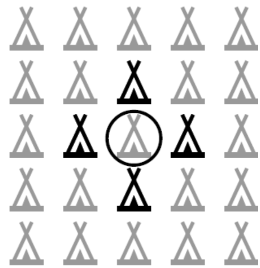
PIKOMAT

35. ročník www.pikomat.sk školský rok 2017/2018

# Vzorové riešenia 1. série zimnej časti, kategória 8–9

**Úloha S1: Rozvrhnutie tábora** – *Opravoval Pavol „Kebab" Kebis*

Úlohou bolo navrhnúť vhodné rozmiestnenie tábora. V tábore malo byť 25 vigvamov rozmiestnených do štvorca 5 × 5. Vigvamy mohli byť buď zo spletených tráv, alebo z bizónej kože, alebo z konskej kože. Vhodné rozmiestnenie je také, že trávové vigvamy sú najviac dva, a žiadne dva vigvamy z rovnakej kože spolu nesmú susediť. Za susedné sa považujú vigvamy v 4 hlavných smeroch ako na obrázku (kde sú vyznačené štyri susedné vigvamy stredného vigvamu). **Koľko rôznych rozmiestnení tábora spĺňa tieto podmienky?**



Úlohu si rozdelíme na 3 časti, podľa počtu stanov zo spletených tráv. Ten môže byť podľa zadania najviac 2.

**Ak v tábore nie je stan zo spletených tráv.**

V takomto prípade je tábor zložený iba z kožených stanov. Môžeme sa teda pozrieť na pravý horný roh a povedať si, že tam je stan z bizónej kože. Podľa pravidla musia byť vedľa neho stany z konskej kože (aby sme nemali dve rovnaké kože vedľa seba) a vedľa nich stany z bizónej kože... **až zaplníme tabuľku akoby do šachovnice**, s bizóních a konských stanov**.** Teraz si dáme do pravého horného rohu stan z konskej kože. Podobným spôsobom sa nám vytvorí akoby šachovnica, ale s vymenenými stanmi. Keďže v pravom hornom rohu už nič iné nemôže byť, toto sú jediné 2 možnosti rozmiestnenia tábora bez trávových stanov.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | K | B | K | B |
| | | K | B | K |
| | | | K | B |
| | | | | K |
| | | | | |

**Ak je v tábore len jeden stan zo spletených tráv.**

Keďže je len jeden a miest v tábore je 25, tak je jasné, že môže byť na ľubovoľnom z týchto 25 miest. Ostáva zistiť, koľkými spôsobmi vieme vyplniť zvyšok tábora. Rovnakým spôsobom ako v predošlom prípade si môžeme dať do pravého horného rohu stan z bizónej kože a potom stan z konskej kože. Keďže stan z tráv vedľa kožených stanov byť môže, tak nám jeho pridanie určite žiadne možnosti nezoberie. Ale pozrime sa či nám nejaké nepridá.

Najprv si niekde umiestnime prvý kožený stan. Z tohto miesta sa vieme prechádzaním do susedných políčok, bez toho aby sme prešli cez stan z tráv, dostať na určité miesta v tábore. Na všetkých týchto miestach vieme podľa prvého koženého stanu určiť, aký stan tam bude, na základe podobnej šachovnice ako v predošlom prípade. Ak sa niekam nevieme dostať, tak to znamená, že toto miesto je nezávislé od prvého stanu, lebo sem už nesiaha naše šachovnicové rozmiestnenie, a teda tu vznikajú nové spôsoby. Lenže každé políčko v tabuľke má aspoň 2 susedné políčka a teda, aby sme oddelil nejaké políčko/a od zvyšku tábora, potrebovali by sme aspoň 2 stany z tráv, čo teraz nemáme, takže sa žiadne ďalšie možnosti nevytvoria a teda **možností je 25x2** (lebo na začiatku máme dve možnosti aký kožený stan umiestnime)

**Ak sú v tábore dva stany zo spletených tráv.**
V tomto prípade potrebujeme najprv umiestniť stany z tráv. Počet možností ako ich dať do tábora je 25*24/2. Pretože najprv vyberieme, kde sa bude nachádzať prvý stan (25 možností), potom nám ostalo 24 voľných políčok kde môžeme umiestniť druhý stan. Lenže každú možnosť by sme zopakovali dva krát. Lebo raz sme ako „prvý" stan označili jeden a raz druhý. Teraz už len ostáva vyriešiť, ako vyplniť zvyšok tábora. Rovnako ako v predošlom prípade môžeme niekam umiestniť prvý kožený stan a ten určí zvyšok tábora. Ani tentoraz možnosti neubudnú, ale nové sa pridajú.

Pre rohové políčka totiž platí, že **stačia 2 stany z tráv, aby sme ich odčlenili od zvyšku tábora** (dostanú sa tak mimo našej šachovnice)**.** Ostatné políčka majú aspoň troch susedov a teda by boli potrebné aspoň 3 stany z tráv. Teda rovnako ako na obrázku vieme vedľa rohového stanu dať 2 stany z tráv a ten potom môže byť z akejkoľvek kože. Ak sú stany z trávy pri rohu, vieme umiestniť tábor 4 spôsobmi. Najprv si určíme aký bude roh a zvyšok tábora určíme ako v predošlých prípadoch (2 x 2 možnosti). Ak nie, potom sa jedná o dva spôsoby, podobne ako v predošlých prípadoch.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| B | K | B | K | B |
| K | K | K | B | K |
| B | K | K | K | B |
| **T** | B | K | B | K |
| | **T** | B | K | B |

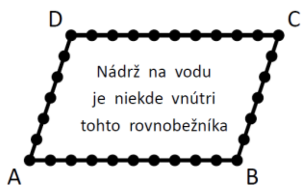
Teraz už len všetko sčítame: 2 + 50 + (25*24/2-4)*2 + 4*4 = **660 rozmiestnení tábora**

## Bodovanie:

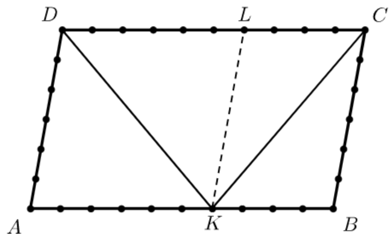
2 spôsoby bez trávových stanov - 1b.; 50 spôsobov s jedným trávovým stanom - 1b.; 600 spôsobov rozmiestnenia dvoch trávových stanov - 1,5b.; dokázanie, že iné možnosti nie sú - 1b.; rohové umiestnenie trávových stanov - 0,5b.

## Úloha S2: Ohrada pre kone – *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková*

Stádo mustangov bolo vo zvláštnej ohrade. Plot ohrady bol v tvare rovnobežníka *ABCD* ako na obrázku. Plot držal na koloch, ktoré boli od seba v rovnakých rozostupoch, pričom na dlhšej strane bolo 11 kolov a na kratšej bolo 7 kolov. V tejto ohrade bola tiež nádrž s vodou pre kone *N*, ktorá sa nachádzala niekde na priamke spájajúcej kôl *D* s jedným z kolov *K* na obvode ohrady tak, že obsah trojuholníka *ADN* bol štvornásobkom obsahu trojuholníka *CDK*. **Ktoré z kolov mohli byť kôl *K*?**

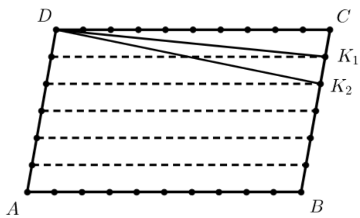


Postupne budeme vylučovať koly, ktoré nemôžu byť kolom K. Ak by K bol jeden z kolov na strane DC, koly C, D a K by netvorili trojuholník. Ak by bol jedným z kolov na strane AD aj nádrž by musela byť na strane AD. Potom by ale koly A, D a N netvorili trojuholník.




Poďme sa pozrieť na koly na strane AB. Jeden si vyberme a veďme z neho rovnobežku so stranou BC. Vznikne nám rovnobežník AKLD, ktorý je uhlopriečkou DK rozdelený na dva zhodné trojuholníky. Trojuholníky ADK a LDK majú rovnaký obsah. Ak kôl K je niekde vnútri strany AB, tak trojuholník LDK je menší ako trojuholník CDK a ak je K v bode B, tak sú rovnaké. Keďže bod N je niekde na úsečke DK, $\triangle$ ADN môže byť najväčší, ak sa zhoduje s trojuholníkom ADK. Obsah trojuholníka ADN teda určite nemôže byť štvornásobkom obsahu trojuholníka CDK.

Všimnime si ešte jednu vec. Ako sme povedali, rovnobežník AKLD je rozdelený na polovice úsečkou DK a rovnako i rovnobežník KBCL je rozdelený na polovice úsečkou KC. Trojuholník CDK sa skladá z trojuholníka LDK a trojuholníka CLK, teda jeho obsah je polovica obsahu veľkého rovnobežníka ABCD. Podobne ak vezmeme bod X na strane BC, tak obsah trojuholníka ADX bude tvoriť polovicu obsahu rovnobežníka. Ostávajú nám už iba koly vnútri strany BC. Nech si vyberieme ľubovoľný kôl, trojuholníka ADK bude polovica celého rovnobežníka ABCD, teda aj obsah trojuholníka ADN môže byť najviac polovica obsahu ABCD (to je vtedy, keď bod N leží v bode K). Trojuholník CDK teda nemôže byť viac ako osmina celého rovnobežníka ABCD, lebo inak by sme ani pre najväčší možný trojuholník ADN nedocielili, aby bol ADN štyrikrát väčší.




Z každého kolíka ležiaceho na strane BC veďme rovnobežku so stranou AB. Vznikne nám 6 rovnako veľkých rovnobežníkov s obsahom 1/6 veľkého rovnobežníka ABCD. Keby bol kôl K druhým kolom od bodu C, $\triangle$ CDK by bol polovica z 2/6, teda 1/6 obsahu rovnobežníka. To je priveľa. Vo vzdialenejších koloch od bodu C by bol obsah ešte väčší. Keby bol K hneď vedľa bodu C, obsah trojuholníka CDK by bol polovica z 1/6, teda 1/12 obsahu rovnobežníka. Tento trojuholník nám už vyhovuje. Keď budeme N posúvať z kolu K smerom k bodu D, obsah trojuholníka ADN sa bude zmenšovať, až niekde natrafí na 1/3 obsahu rovnobežníka. V tom bode sa nachádza nádrž pre kone.

**Kôl K môže byť iba kôl na strane BC hneď vedľa bodu C.**

## Bodovanie:

1b výsledok. 1b vylúčenie kolov na stranách AD a DC. 1,5b vylúčenie kolov na strane AB. 1,5b vylúčenie ostatných kolov na strane BC. 3,5b ak ste úlohu vyriešili len pre obdĺžnik

**Úloha S3: Dymové signály** – *Opravoval Jakub „Kubo“ Poljovka*

Gito si práve vymyslel vlastný systém dymových signálov. Už ním vie zakódovať slovo „*MI*“. Vie ním zakódovať aj niektoré ďalšie slová podľa týchto pravidiel:

1. Ak vie zakódovať slovo končiace na *I*, vie zakódovať aj slovo, ktoré je rovnaké s pridaným písmenom *U* na konci. Napríklad *MII* → *MIIU*.
2. Ak vie zakódovať slovo v tvare *Mx*, vie zakódovať aj slovo *Mxx* (pričom *x* je ľubovoľné písmeno alebo skupina písmen). Napríklad *MIU* → *MIUIU*.
3. Ak vie zakódovať slovo obsahujúce *III*, vie zakódovať aj slovo, v ktorom nahradí *III* písmenom *U*. Napríklad *MIIIIUU* → *MIUUU*.
4. Ak vie zakódovať slovo obsahujúce *UU*, vie zakódovať aj slovo, v ktorom tieto *UU* odstráni. Napríklad *MIIIIUU* → *MIIII*.

**Vie Gito vytvoriť slovo „*MU*“? Ak áno, ako? Ak nie, prečo?**

Aby sa nám z pôvodného slova **MI** podarilo vytvoriť slovo **MU**, musíme pomocou zadaných pravidiel odstrániť písmeno **I**, keďže v slove **MU** písmeno **I** nemáme. Pokúsme sa teda zistiť, či dokážeme vytvoriť slovo, ktoré nebude obsahovať žiadne **I**.

Všimnime si, že písmen **I** sa môžeme zbavovať iba pomocou tretieho pravidla, a to tak, že pôvodný počet písmen **I** sa nám vždy zmenší o tri. Aby sme sa teda úplne zbavili písmen **I**, musela by najprv nastať situácia, že ich počet bude deliteľný tromi.

Zamyslime sa teraz nad tým, či môže nastať nasledovná situácia: <u>Máme nejaké slovo **S**, ktorého počet písmen **I** nie je deliteľný tromi. Na toto slovo uplatníme niektoré z daných štyroch pravidiel a nové slovo, ktoré nám vznikne, bude mať počet písmen **I** deliteľný tromi.</u>

Ak na slovo **S** uplatníme prvé, alebo štvrté pravidlo, počet písmen **I** v danom slove sa nám nezmení. Čiže ak tento počet nebol predtým deliteľný tromi, nebude ani teraz

Ak na slovo **S** uplatníme tretie pravidlo, znížime počet písmen **I** o tri. Keď však zoberieme počet **I** o tri menší ako pôvodný počet, počet **I** bude mať rovnaký zvyšok po delení číslom tri, ako pred tým. Čiže ak pôvodný počet písmen **I** dával nejaký zvyšok po delení číslom tri (teda nebol deliteľný tromi), aj počet, ktorý získame po použití tretieho pravidla, bude dávať rovnaký zvyšok, čiže nebude deliteľný tromi.

Ak na slovo **S** uplatníme druhé pravidlo, počet písmen **I** sa nám zdvojnásobí. Predstavme si, že pôvodný počet rozložíme prvočíselným rozkladom na súčin prvočísel. Súčinom ľubovoľnej kombinácie týchto prvočísel teda musíme vedieť vytvoriť všetky delitele nášho počtu. V tomto prvočíselnom rozklade sa určite nebude nachádzať číslo 3, lebo predpokladáme, že pôvodný počet nie je deliteľný tromi. V prvočíselnom rozklade dvojnásobku tohto počtu sa teda číslo 3 tiež nebude nachádzať, lebo tento rozklad obsahuje všetky prvočísla pôvodného počtu a ešte jednu dvojku navyše. To teda znamená, že ak pôvodný počet písmen **I** nebol deliteľný tromi, tak ani po uplatnení druhého pravidla nedostaneme počet písmen **I** deliteľný tromi.

Podarilo sa nám teda dokázať, že vyššie spomenutá situácia nemôže nastať. Keďže počet písmen **I** pôvodného slova **MI** nie je deliteľný tromi, nedokážeme pomocou ľubovoľnej kombinácie daných pravidiel docieliť, aby počet písmen **I** nového slova bol deliteľný tromi. Z toho teda jasne vyplýva, že Gito nedokáže zakódovať slovo **MU**.

**Bodovanie:**

Poznatok, že písmeno I musíme pomocou daných pravidiel odstrániť z pôvodného slova MI – 0,5b. Poznatok, že aby sme dokázali písmeno I odstrániť, tak musíme dosiahnuť, aby bol počet písmen I deliteľný tromi – 1b. Kompletný dôkaz, že počet písmen I v slove, ktoré patrí do systému dymových signálov, nebude nikdy deliteľný tromi – 3,5b

> **Úloha S4: Kaktusy v údolí** – *Opravovala Zuzana „Zuzka“ Frankovská*
> Strážcovia sa volajú Anpetu, Bnobi, Chaw a Dčobe. Nakaru vie, že práve dvaja z nich určite hovoria pravdu a zvyšní dvaja vždy klamú, ale nevie, ktorí z nich to sú a tiež nevie, či kúzelník hovorí pravdu. Nakaru sa teda strážcov opýtal, či kúzelník hovorí pravdu:
> Bnobi: „Áno, kúzelník hovorí pravdu.“
> Dčobe: „Chaw hovorí pravdu.“
> Anpetu: „Bnobi a Dčobe vždy hovoria opačné veci (práve jeden z nich klame).“
> Chaw: „Anpetu klame.“
> Nakaru sa ich potom spýtal: „Koľko kaktusov mi kúzelník povie, že má v údolí?” Odpovedali:
> Anpetu: „Číslo, ktoré ti povie, je menšie ako 29.“
> Bnobi: „Číslo, ktoré ti povie, je deliteľné 8.“
> Chaw: „Dvojnásobok čísla, ktoré ti povie, zväčšený o 5 je 37.“
> Dčobe: „Číslo, ktoré ti povie, je menšie, ako 13.“
> **Vie Nakaru určiť, aké číslo mu povie kúzelník? Bude toto číslo pravdivé?**

Tento príklad má dve časti. Najskôr treba určiť, kto hovorí pravdu a kto klame, a potom treba vypočítať, koľko by mohlo byť kaktusov.

Podľa zadania práve dvaja zo štyroch strážcov hovoria pravdu. Dčobe hovorí, že Chaw hovorí pravdu, z čoho vyplýva, že buď hovoria obaja pravdu alebo obaja klamú. Ak by obaja hovorili pravdu, tak to by už boli dvaja, teda by zvyšní, Anpetu a Bnobi, klamali. Anpetu hovorí, že práve jeden z dvojice Bnobi a Dčobe hovorí pravdu. V tomto prípade je to pravda, no Anpetu má klamať, čo je spor. **Dčobe a Chaw teda musia klamať, a Anpetu a Bnobi musia hovoriť pravdu.** Vďaka Bnobiho výroku vieme, že kúzelník hovorí pravdu a číslo preto bude pravdivé.

Vieme, že Anpetu a Bnobi hovoria pravdu, takže hľadané číslo je menšie ako 29 a je deliteľné ôsmimi. Takéto čísla sú len 0, 8, 16 a 24. Ďalej sa pozrieme na výroky, ktoré sú nepravdivé. Chaw hovorí, že dvojnásobok čísla zväčšený o 5 je 37, čiže v podstate hovorí, že hľadané číslo je 16. On však klame, takže číslo určite nebude 16. Zostávajú čísla 0, 8 a 24. Dčobe hovorí, že hľadané číslo je menšie ako 13, pri čom klame, takže hľadané číslo je väčšie alebo rovné 13. Túto podmienku spĺňa už len jedno z potenciálnych čísel a to 24.

Nakaru vie určiť, aké číslo mu povie kúzelník. Je to číslo 24 a je pravdivé.

**Bodovanie:**

správne určenie, kto hovorí pravdu a kto klame, vrátane kúzelníka – 1 b.; odôvodnenie toho, prečo práve títo hovoria pravdu a ostatní klamú - 2,5 b.; zistenie, že čísla 8, 16, 24 sedia podľa pravdivých výrokov – 0,5 b.; zistenie, že len číslo 24 sedí, keď k tomu pridáme nepravdivé výroky – 1 b.

## **Úloha S5: Príklad učiteľa** – *Opravoval Juraj „Juro“ Pavlovič*

**Nájdite najväčšie trojciferné číslo, ktorého ciferný súčet je prvočíslo a ciferný súčin je tretia mocnina prirodzeného čísla. Nájdite aj najväčšie štvorciferné číslo, ktorého ciferný súčet je prvočíslo a ciferný súčin je štvrtá mocnina prirodzeného čísla.** Poznámka: Nulu za prirodzené číslo nepovažujeme.

Najväčší možný ciferný súčet aj súčin dosiahneme, keď budú všetky cifry najväčšie možné, teda samé deviatky. Pri 3-cifernom čísle je to súčet 9+9+9 = 27. To ale nie je prvočíslo. Ako ciferný súčet teda pripadajú do úvahy všetky prvočísla menšie ako 27, čo sú: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Najväčší ciferný súčin je 9·9·9 = 729, no keďže toto číslo sme už vylúčili kvôli cifernému súčtu, tak ako ciferný súčin pripadajú do úvahy všetky tretie mocniny menšie ako 729, čo sú: $1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $7^3 = 343$; $8^3 = 512$; $\cancel{9^3 = 729}$.

Hľadáme najväčšie možné číslo, preto sa najprv pozrime na čísla začínajúce dvoma deviatkami: 99_. Ciferný súčet je zatiaľ 18, treťou cifrou ho môžeme doplniť iba na 19 alebo 23, a to pri číslach 991 a 995. Keď teraz ale skontrolujeme ciferné súčiny 9·9·1 = 81 a 9·9·5 = 405, žiaden z nich nie je jednou z vyššie vypísaných tretích mocnín. Takže hľadané číslo nemôže začínať 99_. Ďalšie v poradí sú čísla začínajúce 98_. Postupujeme rovnako: ciferné súčty môžu byť 17, 19, 23, a to pri číslach 980, 982, 986. Opäť nás však sklamú ciferné súčiny 9·8·0 = 0; 9·8·2 = 144; 9·8·6 = 432. Tiež si všimneme a odteraz budeme dodržiavať to, že akýmkoľvek číslom s cifrou 0 sa netreba ani zapodievať. Takto ešte preveríme čísla začínajúce 97_ (977, 973, 971), kde tiež žiadne nevyhovuje. Až napokon pri 96_ zažijeme posledné sklamanie pri 968 (vlastne sme ani nemuseli skúšať, lebo tie isté cifry boli už pri 986), a nájdeme **najväčšie vyhovujúce číslo 964**.

Pri 4-ciferných číslach sa však tento postup stáva veľmi zdĺhavým, tak si pomôžeme inak. Tentokrát sa budeme snažiť vytvoriť čísla s vyhovujúcim ciferným súčinom a až potom budeme kontrolovať ich ciferný súčet. V rámčeku si vypíšeme všetky štvrté mocniny, ktoré pripadajú do úvahy a k nim vypíšeme ich rozklady na súčiny prvočísel.

$1^4 = 1 = 1$
$2^4 = 16 = 2·2·2·2$
$3^4 = 81 = 3·3·3·3$
$4^4 = 256 = 2·2·2·2·2·2·2·2$
$5^4 = 625 = 5·5·5·5$
$6^4 = 1296 = 2·2·2·2·3·3·3·3$
$7^4 = 2401 = 7·7·7·7$
$8^4 = 4096 = 2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2$
$9^4 = 6561 = 3·3·3·3·3·3·3·3$

Aby 4-ciferné číslo malo ciferný súčin ako v rámčeku, musia sa jeho 4 cifry skladať <u>presne</u> z prvočísel v príslušnom riadku. Takže sa budeme snažiť pre každý riadok v rámčeku dané prvočísla „rozdeliť“ na 4 skupinky tak, aby nám po vynásobení každej skupinky vznikla 1 cifra. Pozor, mnohí zabúdali na to, že v tom 4-cifernom čísle môže byť aj cifra 1, ktorá „nepoužíva“ žiadne z prvočísel z rámčeka (zároveň cifra 1 nijako neovplyvní ciferný súčin). No a stále pamätáme na to, že súčet týchto 4 cifier má byť prvočíslo.

V prvom rade si uvedomíme, že v riadkoch, kde sú len nepárne prvočísla, budeme môcť vytvoriť len nepárne cifry (aj 1 je nepárna cifra). Lenže súčet 4 nepárnych cifier bude určite párny, a teda to nebude môcť byť prvočíslo. Takže tieto riadky rovno vylúčime – sú to $1^4$, $3^4$, $5^4$, $7^4$, $9^4$. V ostatných riadkoch už nám neostáva iné ako skúsiť vytvoriť všetky možné kombinácie 4 cifier. Sú to: pre <u>16</u> = 8·2·1·1 = 4·4·1·1 = 4·2·2·1 = 2·2·2·2; pre <u>256</u> = 8·8·4·1 = 8·8·2·2 = 8·4·4·2 = 4·4·4·4; pre <u>1296</u> = 9·9·8·2 = 9·9·4·4 = 9·8·6·3 = 9·6·6·4 = 6·6·6·6; pre <u>4096</u> = 8·8·8·8. Zamyslieť sa nad systémom, ako vytvárať tieto štvorice tak, aby sme žiadnu nevynechali, prenechávam na čitateľa. Pokiaľ v riešení žiadna možnosť nechýbala, popis systému ich vytvárania som nevyžadoval. Žiaľ, ani jedna z týchto štvoríc cifier nemá ciferný súčin prvočíslo. Preto **vyhovujúce 4-ciferné číslo neexistuje**.

### <u>Bodovanie</u>:

3-ciferné riešenie – 1b.; preverenie, či je naozaj najväčšie – 0,5b.; postup – 1b.; odpoveď, že 4-ciferné neexistuje – 0,5b.; zdôvodnenie a postup – 2b.