Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

35. ročník www.pikomat.sk školský rok 2017/2018

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Klobúčiky – *Opravoval Martin „Panda" Svetlík*

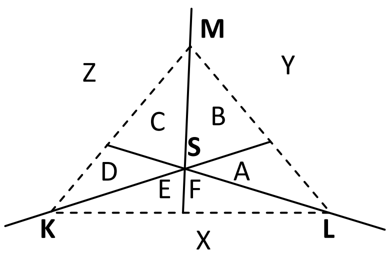
Nakaru si končekmi prstov z húb odtrhol 5 klobúčikov a rozložil ich na rovnú časť kmeňa tak, že žiadne tri klobúčiky neboli na jednej priamke. **Ukáž, že nech rozostavil klobúčiky akokoľvek, určite sa medzi nimi dali nájsť štyri také, čo stáli vo vrcholoch konvexného štvoruholníka. Ukáž tiež, že ak by rozmiestnil 8 klobúčikov, kde žiadne tri neležia na jednej priamke, nemuselo by sa medzi nimi nachádzať päť klobúčikov tvoriacich konvexný päťuholník.** Poznámka: Konvexný útvar je taký útvar, ktorý má všetky vnútorné uhly menšie ako 180°.

Táto úloha mala dve časti – v prvej bolo treba dokázať, že **niečo platí pre všetky prípady** (**pre všetky** rozmiestnenia 5 klobúčikov sa tam **musí nachádzať** konvexný štvoruholník). Tu nám nestačí ukázať pár príkladov, ale potrebujeme naozaj ukázať, že to bude platiť pre všetky rozmiestnenia. V druhej časti, naopak, treba ukázať, že niečo nemusí vždy platiť (**nemusí sa stať**, že by sa medzi 8 klobúčikmi nachádzal konvexný päťuholník). Teda tu nám **stačí nájsť jedno rozmiestnenie**, kde to neplatí, teda kde sú len samé nekonvexné päťuholníky.

Pozrime sa najprv na prvú časť – ukážeme, že nech by Nakaru umiestňoval klobúčiky akokoľvek, tak konvexný štvoruholník sa tam objaví.

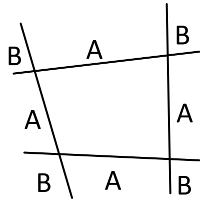
Ak by už prvé 4 klobúčiky umiestnil do tvaru konvexného štvoruholníka, tak bez ohľadu na to, kam dá piaty, tak už má konvexný štvoruholník. Čo ak ale prvé 4 tvoria nekonvexný štvoruholník, čiže trojuholník a štvrtý klobúčik vnútri neho? Kam potom môže umiestniť piaty klobúčik?

Rozdelím si ten trojuholník s bodom vo vnútri (Obr. 1) polpriamkami, z ktorých každá začína na jednej strane trojuholníka, prechádza vnútorným klobúčikom (S) a potom vrcholom trojuholníka (KLM). Vonkajšie zóny (ohraničené polpriamkami a stranami trojuholníka) budem volať X, Y, Z, vnútorné A, B, C, D, E, F. **Nech by som dal piaty klobúčik do ktorejkoľvek zóny, nájdem tam konvexný štvoruholník, konkrétne:** **A**SKL, **B**SKM, **C**SLM**, D**SLK**, E**SMK**, F**SML, **X**LSK**, Y**MSL**, Z**KSM.



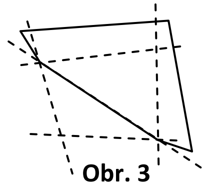
Obr. 1

Tak. Máme **pre všetky umiestnenia** piateho klobúčika jasné, kde je konvexný štvoruholník, tešíme sa. Teraz sa pozrime na druhú časť úlohy. Iste, ľahko nájdeme také rozmiestnenia, kde konvexný päťuholník bude, ale stačí nám nájsť jedno také rozmiestnenie, kde žiadny konvexný 5-uholník nebude, a máme, čo potrebujeme.

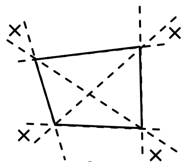


Obr. 2

Tu som už nevyžadoval dlhý dôkaz (keďže nič extra nedokazujeme, len hľadáme protipríklad), proste sme si kreslili a našli sme. Napriek tomu, keďže viacerí z Vás nemali úplne správne rozmiestnenie 8 klobúčikov, tak popíšem, ako také nájsť a na čo si dávať pozor. Kým máme 4 klobúčiky, je to bezpečné, tak povedzme, že ich máme v peknom konvexnom štvoruholníku. Kam umiestniť piaty klobúčik, aby sme nevytvorili konvexný 5-uholník? Zóny typu A (Obr. 2) by nám ho vytvorili, zóny typu B sú bezpečné. Tak dáme do každej z nich jeden klobúčik – zatiaľ to môžeme spraviť, no a okrem toho sú takéto zóny 4 a my potrebujeme umiestniť 4 klobúčiky. Musíme si ale dávať pozor, aby nám niečo po uhlopriečke nevytvorilo konvexný 5-uholník (Obr. 3).


Obr. 3

Preto body v zónach B „otočíme“ všetky rovnako – buď v smere hodinových ručičiek od uhlopriečky, alebo proti smeru od uhlopriečky (Obr. 4). Takže sme našli umiestnenie, kde sa konvexný 5-uholník nenachádza – 4 klobúčiky tvoria štvoruholník, zvyšné 4 sú vyznačené okolo tohto štvoruholníka krížikmi.


Obr. 4

Bodovanie:

dôkaz pre 5 klobúčikov a štvoruholník – 3,5b.; ukážka 8 klobúčikov, kde nie je konvexný päťuholník – 1,5b.

Poznámka:

Mimochodom, ak by mal Nakaru klobúčikov 9, už by tam určite bol konvexný 5-uholník. Napríklad preto, že v aspoň jednej zóne B by museli byť dva, alebo by bol ten piaty niekde v strede. Môžete sa nad tým zamyslieť, ale to už, samozrejme, nie je povinné. Ak by ich mal 17, určite by tam bol konvexný 6-uholník (dôkaz už vôbec nie je ľahký). Ale koľko bodov by bolo treba, aby sme mali istotu, že tam bude konvexný 7-uholník? To zatiaľ nikto nevie. Hypotéza je, že tieto čísla (od trojuholníka vyššie: trojuholník 3, štvoruholník 5, päťuholník 9, šesťuholník 17) sú $2^{n-2}+1$, teda mocniny dvojky plus jedna. Pre 7-uholník by to vychádzalo 33. Ale zatiaľ to nikto nedokázal. Tento problém označil známy matematik Paul Erdős ako *Happy Ending Problem*, pretože dvaja z jeho spolupracovníkov (George Szekeres a Esther Klein – maďarskí matematici) nad tým strávili toľko času, až sa zobrali.

Úloha S2: Skúška mozgu – *Opravoval Jakub „Kubo“ Hluško*

> „Myslím si trojciferné číslo. Ak vynechám jeho strednú cifru, dostanem číslo deväťkrát menšie. **Aké všetky čísla si môžem myslieť?**“

Ako prvý krok si zadanie prevráťme – máme dvojciferné číslo a keď ho vynásobíme deviatimi, dostaneme číslo, ktoré je trojciferné a prvú aj poslednú cifru má rovnakú ako pôvodné.

Ak má deväťnásobok čísla rovnakú poslednú cifru ako pôvodné číslo, **posledná cifra môže byť jedine 0 alebo 5**. Toto si vieme overiť ľahko – vyskúšame $0 \cdot 9$, $1 \cdot 9$, $2 \cdot 9$, ..., $9 \cdot 9$ a pozrieme sa, kedy výsledok končí daným číslom.

Nulu môžeme okamžite vylúčiť – keď si zoberieme číslo ako 10, 20, 30... a skúsime nejakú cifru vsunúť do stredu, vyjde nám najmenej (keď tam dáme nulu) desaťnásobok pôvodného čísla. A to je viac ako deväťnásobok. Preto **bude číslo končiť päťkou.**

Čo teraz? Naše trojciferné číslo si vieme napísať ako $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$, dvojciferné ako $10 \cdot a + c$. Keď toto dáme do rovnosti (dvojciferné je deväťkrát menšie, spomínate si?), dostaneme **$100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 9 \cdot (10 \cdot a + c)$**. To nevyzerá vábne, však? No nám stačí si uvedomiť, že už sme zistili, že $c = 5$, takže si za c dosadíme 5, roznásobíme zátvorku a už sa nám to mení k lepšiemu: **$100 \cdot a + 10 \cdot b + 5 = 90 \cdot a + 45$**. Keď od oboch strán odčítame $90 \cdot a$ a potom aj 5, dostaneme **$10 \cdot a + 10 \cdot b = 40$**. Po vydelení desiatimi dostávame **$a + b = 4$**.

Tu už nebude mnoho možností, aké môžu byť cifry a a b: 0 a 4; 1 a 3; 2 a 2; 3 a 1; 4 a 0. Teda dostávame **čísla 135, 225, 315 a 405**, pri ktorých už ľahko otestujeme, že **všetky vyhovujú zadaniu a po vyškrtnutí strednej cifry sa zmenšia na devätinu.** Vynechali sme možnosť 045/9 = 05, pretože to nie je ani trojciferné číslo, ani správny zápis.

Bodovanie:
poznatok, že na poslednom mieste je 5 (alebo 0) – 2b.; zistenie, že $a + b = 4$ – 2b.; úspešné doskúšanie všetkých 4 možností – 1b.

Úloha S3: Hra od Naowi – *Opravoval Marián „Majo“ Poturnay*

Hra pozostávala z tabuľky 3 × 3 a kartičiek s číslami 1 až 9. Tieto kartičky ukladal Nakaru do tabuľky tak, aby súčet čísel v každom riadku aj stĺpci bol rovnaký. **Koľkými spôsobmi tak Nakaru mohol vyplniť tabuľku?**

Aby sme vedeli, ako chceme umiestňovať čísla do tabuľky, vypočítajme si, aký súčet musia dávať čísla v každom riadku alebo stĺpci. Súčet všetkých čísel je 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45. Keďže máme 3 riadky, tak **čísla v každom riadku musia mať súčet 45/3 = 15**. Obdobne máme 3 stĺpce, a preto aj **súčet čísel v každom stĺpci musí byť 15**. Odtiaľto sa dalo pokračovať viacerými spôsobmi. Ukážeme si jeden z nich – ten, pri ktorom bola (snáď) najmenšia šanca pomýliť sa.

<table>
<tr><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Najprv si uvedomíme, že každé číslo musíme v konečnom dôsledku niekam umiestniť. Preto si môžeme vybrať číslo, ktoré umiestnime ako prvé. Napríklad môžeme začať číslom 1. **Číslo 1 vieme umiestniť deviatimi spôsobmi** – máme na výber ktorékoľvek z deviatich políčok. Všimnime si, že keď niekam umiestnime jednotku, potrebujeme do riadku a do stĺpca, ktorý túto jednotku obsahuje, pridať po dve čísla, ktoré dávajú súčet 15 – 1 = 14. Pomocou čísel od 2 do 9 vieme číslo 14 dostať ako súčet dvoch čísel len dvomi spôsobmi: 9+5 alebo 8+6 (nemôžeme použiť 7+7, pretože máme len jednu sedmičku). Súčet 14 však potrebujeme dostať dvakrát – raz pre stĺpec a raz pre riadok. Preto musíme využiť oba spôsoby zápisu čísla 14, a tak vieme povedať, že **niektorý riadok alebo stĺpec**

musí obsahovať trojicu čísel 1, 5, 9 (v nejakom poradí) **a niektorý riadok alebo stĺpec musí obsahovať trojicu 1, 6, 8** (v nejakom poradí).

5	1	9
	8	
	6	

Umiestnime tieto 2 trojice. Napríklad umiestnime trojicu 1, 5, 9 (je jedno, ktorú trojicu umiestnime ako prvú, keďže nakoniec musíme doplniť všetky čísla). Z nej umiestnime najprv napríklad číslo 5. **Číslo 5 vieme umiestniť štyrmi spôsobmi** – môžeme ho umiestniť na ľubovoľné z dvoch políčok v rovnakom riadku ako 1 alebo na ľubovoľné z dvoch políčok v rovnakom stĺpci ako 1. Následne musíme číslo 9 umiestniť jednoznačne (musí dokončiť trojicu 1, 5, 9). Ďalej doplníme trojicu 1, 6, 8 a z nej ako prvé napríklad číslo 6. Keďže už jeden riadok alebo stĺpec zaberá trojica 1, 5, 9, tak **číslo 6 vieme umiestniť dvomi spôsobmi** – v rámci voľného riadku alebo stĺpca ho môžeme umiestniť na ľubovoľné z dvoch voľných políčok. Číslo 8 potom musíme umiestniť jednoznačne (musí dokončiť trojicu 1, 6, 8).

5	1	9
3	8	4
7	6	2

Ďalej umiestnime číslo 7. Nemôžeme ho umiestniť spolu s číslami 9 ani 8, pretože by súčet prekročil 15. Preto sa 7 musí nachádzať v riadku alebo stĺpci, ktorý obsahuje číslo 6, a v riadku alebo stĺpci obsahujúcom číslo 5 (z predošlého odseku vieme, že 5 a 6 nie sú v spoločnom riadku či stĺpci). Zvyšné čísla už doplníme jednoducho – keďže 7+6 = 13, tak k nim príde číslo 2, podobne 7+5 = 12, a tak budú v trojici s číslom 3. Na záver umiestnime číslo 4 na posledné voľné miesto a ľahko overíme, že súčet v oboch smeroch je naozaj 15. Celá vyplnená tabuľka bude vyzerať napríklad tak, ako na obrázku. Všimnime si, že pre každé vyhovujúce umiestnenie čísel 1, 5, 6, 8, 9 je len jeden spôsob umiestnenia čísel 2, 3, 4, 7. Preto je počet možností, ako umiestniť všetky čísla, rovný počtu možností, ako umiestniť čísla 1, 5, 6, 8, 9. **Počet všetkých možností je preto 9·4·2 = 72**.

Bodovanie:

správne a úplné riešenie – 5b.; za nájdenie menšieho alebo väčšieho počtu možností som udeľoval body podľa náročnosti myšlienok, ktoré viedli k správnemu počtu možností; body som strhával aj za nedostatočné ukázanie, že možností nemôže byť viac.

Úloha S4: Šamanove čary – *Opravovali Daniel „Dano“ Kopf*
Jakub „Kubo“ Pravda

V uličke medzi stanmi bolo 20 nádob s pemikamom, okolo ktorých chodil šaman a mrmlal nezrozumiteľné zaklínadlá. Keď išiel prvýkrát, všetky nádoby otvoril. Keď išiel druhýkrát, zatvoril každú druhú nádobu. Tretí raz chytil každú tretiu nádobu – ak bola otvorená, tak ju zatvoril a ak bola zatvorená, tak ju otvoril. Po štvrtýkrát toto urobil s každou štvrtou nádobou, po piatykrát s každou piatou a tak ďalej, až kým neprešiel uličkou 20-krát. **Koľko nádob zostalo otvorených? A čo keby všetkých nádob bolo 100 a šaman by uličkou prešiel 100-krát? A čo keby ich bolo 1000 a šaman by uličkou prešiel 1000-krát?**

Na začiatok je fajn si uvedomiť, čo sa vlastne s nádobami deje. Keďže pri prvej pochôdzke ich šaman všetky otvoril, môžeme predpokladať, že na začiatku boli všetky zatvorené.

Pozrime sa, čo sa deje s nejakou nádobou v priebehu toho, ako ich šaman otvára a zatvára. Vezmime si nádobu číslo 18 a premyslime si, kedy sa pri nej šaman zastaví, aby ju zmenil z otvorenej na zatvorenú alebo naopak. Bude to práve vtedy, keď je číslo nádoby deliteľné číslom, koľký-krát ide šaman okolo. Teda pri 18. nádobe sa zastaví v 1., 2., 3., 6., 9. a 18. kole. Keďže na začiatku boli všetky zatvorené, tak **na konci bude každá nádoba zatvorená alebo otvorená podľa toho, či šaman zmenil jej stav párny alebo nepárny počet krát**. Preto by bolo fajn vedieť zistiť, ktoré čísla majú nepárny počet deliteľov.

Určite môžeme každé číslo rozložiť na súčin prvočísel a nájsť postupne všetkých deliteľov, ale veľmi rýchlo zistíme, že je to veľmi prácne a zabralo by nám veľa času, kým by sme to spravili pre všetky čísla od 1 po 1000. Oplatí sa nám preto uvedomiť si, že ak číslo vydelíme niektorým z jeho deliteľov, tak podiel, ktorý dostaneme, je **tiež deliteľom pôvodného čísla**. Preto by sa mohlo zdať, že všetky delitele vieme takto popárovať a že všetky čísla musia mať párny počet deliteľov. Lenže čo ak by daný deliteľ a podiel boli rovnaké čísla? Potom z nich dostaneme iba jedného deliteľa, a keďže zvyšných deliteľov vieme popárovať, dostaneme nepárny počet deliteľov. To znamená, že číslo, ktoré má nepárny počet deliteľov, vieme napísať ako súčin dvoch rovnakých čísel. Takéto čísla sa nazývajú *druhé mocniny* alebo *štvorce*.

Teraz už ľahko spočítame, že v rozmedzí od 1 po 20 sú takéto čísla 4, v rozmedzí 1 až 100 ich je 10 (1×1, 2×2, 3×3, …, 9×9, 10×10) a v rozmedzí 1 až 1000 je týchto čísel 31 (1×1, 2×2, … ,30×30, 31×31), lebo 32×32 je 1024, a to už je viac než 1000.

Bodovanie:

výsledok pre 20 nádob aj s odôvodnením – 1b.; výsledok pre 100 nádob – 1b.; výsledok pre 1000 nádob – 1b.; uvedomenie si, že nás zaujíma parita deliteľov – 0,5b.; ukázanie, že druhé mocniny vyhovujú a iné čísla nie – 1,5b.

Poznámka:

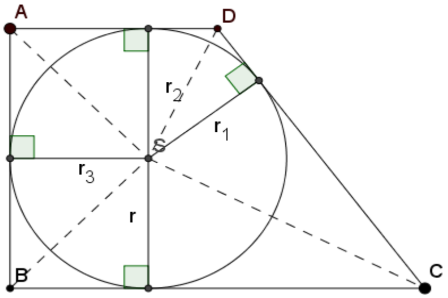
Niektorí z Vás rozmýšľali nad tým, ako by sme zistili presný počet deliteľov, čo je výrazne zložitejšie, ale väčšinou ste to mali dobre. Pre tých, čo tak nepostupovali, môžete sa skúsiť zamyslieť, ako by ste to riešili.

Úloha S5: Talizman – *Opravoval Adam „Santa“ Šánta*

Matka zachráneného dieťaťa z vďaky darovala Nakaruovi svoj ochranný talizman. Ten mal tvar štvoruholníka, ktorému sa dal vpísať kruh s polomerom 2 cm tak, že sa dotýkal všetkých štyroch strán štvoruholníka. Štvoruholník mal strany dlhé 3 cm, 5 cm, 6 cm a 4 cm (v tomto poradí). Nakaruovi napadla zaujímavá otázka: **Aký je obsah štvoruholníka?** Poznámka: Nemusíš dokazovať, či takýto štvoruholník existuje – stačí, keď vyrátaš jeho obsah.

Správnych postupov bolo viacero, spomeniem ten, ktorý použilo najviac z Vás.

Označme si vrcholy štvoruholníka A, B, C a D a stred vpísanej kružnice S. Štvoruholník si vieme rozdeliť na štyri menšie trojuholníky (ASB, BSC, CSD, DSA) podľa spojníc jednotlivých vrcholov štvoruholníka so stredom vpísanej kružnice.



Pretože každá zo strán štvoruholníka je dotyčnicou vpísanej kružnice, musí platiť, že daná strana zviera s polomerom vpísanej kružnice pravý uhol.

To ale vlastne znamená, že tieto polomery môžeme považovať za výšky na základne jednotlivých trojuholníkov – sú na ne kolmé a prechádzajú protiľahlým vrcholom trojuholníka (stredom kružnice S).

Keďže poznáme polomer vpísanej kružnice (výšky) a aj dĺžky jednotlivých strán štvoruholníka (základne trojuholníkov), vieme vypočítať obsahy trojuholníkov. Ich sčítaním dostaneme obsah celého štvoruholníka:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{3\cdot 2}{2} + \frac{5\cdot 2}{2} + \frac{6\cdot 2}{2} + \frac{4\cdot 2}{2} = 18\ cm^2.$$

Bodovanie:

zistenie, že polomer je kolmý na strany – 1b.; nápad rozdeliť štvoruholník – 1b.; výpočet a jeho správnosť – 2b.; správny výsledok – 1b.; za nedostatočné odôvodnenia a iné drobnejšie chyby som strhával 0,5b. až 1b.