Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

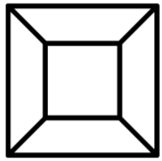
PIKOMAT

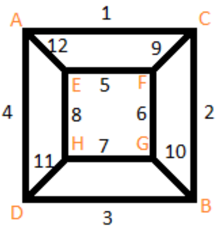
35. ročník www.pikomat.sk školský rok 2017/2018

Vzorové riešenia 2. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Stráže – *Opravovali Svetlana Rampašeková a Juraj „Juro" Pavlovič*

Ulice na tomto podlaží predstavujú dva sústredné štvorce, ktorých zodpovedajúce križovatky – vrcholy – sú prepojené ako na obrázku. Na každej križovatke stojí 1- až 8-členná hliadka, pričom na žiadnych dvoch križovatkách nie je rovnaký počet strážcov. Tribunál vydal rozkaz, aby sa rozostavili tak, že každú ulicu má strážiť iný počet strážcov. **Je to možné? Nezabudni to aj dokázať.**





Označme hliadky na križovatkách písmenami a ulice číslami, ako na obrázku (čísla zatiaľ nehovoria o počte strážcov, len označujú ulice).

Keďže na každej križovatke je iný počet strážcov, celkový počet strážcov je 1+2+3+4+5+6+7+8 = **36**. Z obrázka vidíme, že máme 12 ulíc a každý zo strážcov dáva pozor na 3 ulice (napríklad strážcovia vo vrchole A dávajú pozor na ulice 1, 12 a 4). A keďže každá hliadka dáva pozor na 3 ulice, tak celkový počet „strážení" pre všetky ulice dokopy bude 3·36 = **108**.

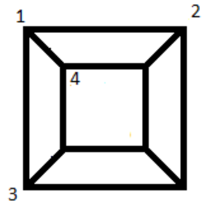
Ďalej vidíme, že na jednu ulicu dávajú pozor vždy 2 hliadky (napríklad na ulicu 1 dávajú pozor hliadky A a C). Preto si vypíšme, aké rôzne súčty počtov strážcov môžeme na uliciach dostať a tiež ako ich môžeme z hliadok vyskladať – viď tabuľku.

3	= 1+2
4	= 1+3
5	= 1+4; 2+3
6	= 1+5; 2+4
7	= 1+6; 2+5; 3+4
8	= 1+7; 2+6; 3+5
9	= 1+8; 2+7; 3+6; 4+5
10	= 2+8; 3+7; 4+6
11	= 3+8; 4+7; 5+6
12	= 4+8; 5+7
13	= 5+8; 6+7
14	= 6+8
15	= 7+8

Máme trinásť súčtov od 3 po 15. Keď zrátame všetky tieto súčty, dostaneme 3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15 = **117**. Keďže máme 13 súčtov, ale iba 12 ulíc, znamená to, že jeden súčet musíme vynechať. Rozdiel medzi súčtom všetkých možných kombinácií hliadok a celkovým počtom „strážení" je 117–108 = 9. Z toho vyplýva, že **súčet, ktorý nemôžeme použiť, je 9**. Ostalo nám 12 súčtov na 12 ulíc, ktoré tým pádom musíme použiť všetky.

Začneme postupne umiestňovať hliadky od tej s najnižším počtom strážcov. Každá hliadka susedí s tromi ďalšími hliadkami. Tiež si treba uvedomiť, že keď 2 hliadky susedia s rovnakou hliadkou, tak nemôžu susediť navzájom – napríklad hliadky C, D, E všetky susedia s hliadkou A, a preto žiadne dve z nich nemôžu susediť navzájom (ako vidno aj na obrázku).

Súčty 3 a 4 vieme vytvoriť len jediným spôsobom. Do jedného rohu umiestnime 1 strážnika a do zvyšných dvoch rohov, ktoré sú s ním spojené ulicou, umiestnime dvoj a trojčlennú hliadku. Keď teraz chceme dostať súčet 5, možnosť 2+3 nemôžeme použiť, lebo 2 aj 3 susedí s 1, a tak nemôžu susediť navzájom. Čiže musíme súčet 5 vytvoriť ako 1+4. Tým pádom už máme pre jednotku troch susedov: 2, 3 a 4. To ale znamená, že súčet 6 nebudeme môcť dosiahnuť ako 2+4. Problém však je, že ho nebudeme vedieť dosiahnuť ani ako 1+5, pretože okolo jednotky už sú všetky tri vrcholy obsadené. **Stražcov nie je možné rozostaviť podľa podmienok zadania.**



Bodovanie:
akýkoľvek správny dôkaz – 5b.; rozobratie niekoľkých konkrétnych možností – 3b.

Úloha S2: Elevátor – *Opravoval Erik Řehulka*

Aby sa zabránilo masovým únikom väzňov, centrálne riadenie sa rozhodlo, že počet privolaní elevátora každý deň bude obmedzený. Funguje to takto:

1. Pri elevátore sú dve nádoby: jedna s čiernymi štítkami a jedna s bielymi. Pán R. vyberie z nádob niekoľko čiernych a niekoľko bielych štítkov tak, aby ich bolo dokopy 72.
2. Vybrané štítky rozdelí do 12 skupín po šiestich štítkoch. Každú šesticu potom vloží do jedného z dvanástich zhodných vreciek. Vrecká so štítkami sa odošlú robotickému zriadencovi.
3. Zriadenec má 12 kociek. Pozrie obsahy všetkých vreciek. Potom vždy zoberie jednu kocku a na jej 6 stien nalepí 6 štítkov z jedného vrecka. Toto urobí pre všetkých 12 kociek. Musí však pritom splniť dve podmienky:
   • Z kociek sa musí dať poskladať kváder 2 × 2 × 3, ktorého povrch je celý biely.
   • Z kociek sa musí dať poskladať kváder 2 × 2 × 3, ktorého povrch je celý čierny.
4. Ak sa to zriadencovi podarí, privolá elevátor.

Ale pozor: zriadenec neakceptuje dve rovnaké rozdelenia štítkov do vreciek, každé ďalšie rozdelenie musí byť jedinečné. Na poradí vreciek nezáleží. **Koľkokrát sa dá elevátor maximálne privolať za jeden deň, teda koľko rôznych sád vreciek spĺňa tieto podmienky?**

Minimálny počet stien každej farby na kocke je 2, keďže z každej vidíme pri skladaní kvádra aspoň dve steny a chceme ho vždy vedieť celý zafarbiť jednou z farieb. Máme teda tieto 3 možnosti, ako môže vyzerať kocka:

A: 3 čierne a 3 biele steny
B: 4 čierne a 2 biele steny
C: 2 čierne a 4 biele steny

Počet kociek, ktoré tvoria rohy kvádra, je 8. Roh potrebuje mať minimálne 3 steny rovnakej farby, aby bol celý kváder rovnako zafarbený. Takže potrebujeme 8 kociek, kde sú 3 čierne a 8 kociek, kde sú 3 biele steny. Vieme teda, že kocky s 3 čiernymi a zároveň 3 bielymi stenami budú aspoň štyri. To preto, lebo musíme mať 8 kociek s 3 stenami jednej farby, a zároveň 8 kociek s troma stenami druhej farby. To by bolo 8+8 = 16 kociek. Ibaže my máme len 12 kociek, a preto aspoň 16–12 = **4 kocky musia mať obe tieto vlastnosti**.

Kocky, kde sú 4 steny jednej farby a 2 steny druhej farby, môžu byť maximálne štyri. Keby ich bolo 5, jedna z nich by musela byť rohová a v prípade stavby kvádra druhej farby by bol nedostatok kociek, kde sú minimálne 3 steny práve tej farby (rohové). Takže vieme, že **kociek typu A môže byť 4 alebo viac, typu B aj typu C môže byť 4 alebo menej**.

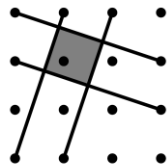
Počet možností vypočítame tak, že zoberieme počet možností pre počet kociek typu B, ktorý je menší alebo rovný 4. To je buď 0, 1, 2, 3 alebo 4, dokopy 5 možností. Potom vezmeme počet možností pre počet kociek typu C, čo je tiež 0 až 4, teda 5 možností. No a vieme, že pre počty typov kociek platí A+B+C = 12, a teda pre každú možnosť počtov B a C bude len jeden vyhovujúci počet kociek typu A, jednoducho toľko, aby sa doplnil cekový počet kociek na 12, keďže počet kociek typu B a C máme pri každej možnosti určený. Celkový počet možností je teda $5\cdot5\cdot1 = 25$. **Elevátor vieme za jeden deň privolať 25-krát.**

Bodovanie:

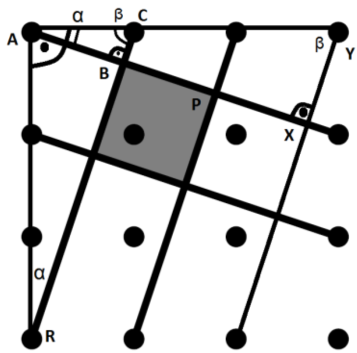
nájdenie 3 typov kociek, ktoré môžeme použiť – 2b.; zistenie, že sú minimálne 4 kocky typu A – 1b.; zistenie, že sú maximálne 4 kocky typu B a typu C – 1b.; správny výsledok – 1b.

Úloha S3: Kapacita elevátora – *Opravovala Hana „Hanka“ Kluvancová*

Výťahová šachta má prierez tvaru štvorca so stranou 30 metrov. Elevátor je pripevnený oceľovými lanami na bežce tak, ako je to na obrázku. Bežce tvoria štvorcovú sieť o strane 10 metrov. **Aký je obsah podstavy elevátora (šedej oblasti na obrázku)?**



Ako prvé by sme sa mali pozrieť na to, aký útvar elevátor v skutočnosti bude. Keďže laná boli na začiatku na seba kolmé a všetky štyri laná sme posunuli o rovnako veľkú vzdialenosť do rovnakého smeru, uhly sa zachovajú, laná budú na seba stále kolmé a útvar bude štvorec.



Zoberme si na začiatku dva trojuholníky ABC a AXY. Vieme o nich povedať, že sú podobné podľa vety uu – majú spoločný uhol BAC o veľkosti alfa a oba majú pravý uhol. Vieme, že ich prepony sú v pomere 10:30, teda 1:3. To znamená, že aj ich zvyšné strany budú v pomere 1:3 – Strana AX sa skladá z 3 rovnako veľkých dielov o veľkosti AB, a teda |AB|=|BP|=|PX|.

Ďalej sa zamerajme na trojuholníky ABC a RAC. Vieme, že sú podobné podľa vety uu – pravý uhol a uhol RCA o veľkosti beta. Obsah trojuholníka RAC vieme vypočítať ako súčin jednej odvesny a druhej odvesny, ktorá je zároveň výškou, to celé predelené dvoma. Teda:

$S_{RAC} = \frac{10\times30}{2} = 150\ m^2$.

Vidíme, že strana AB je zároveň výškou na stranu RC. Veľkosť strany RC si vieme vypočítať pomocou Pytagorovej vety v tvare:

$|AC|^2 + |AR|^2 = |RC|^2$. Teda $|RC| = \sqrt{100+900} = \sqrt{1000}$.

Teraz si už iba vyjadríme výšku na stranu RC, teda stranu AB, pomocou rovnakého vzťahu na výpočet obsahu:

$S_{RAC} = \frac{|RC| \times |AB|}{2}$, odkiaľ $|AB| = \frac{2 \times S}{|RC|} = \frac{300}{\sqrt{1000}}$.

Ako sme už vyššie spomenuli, tak AB = BP, naša hľadaná sivá plocha elevátora má všetky strany o veľkosti BP, pretože je to štvorec, takže náš hľadaný obsah vypočítame ako:

$S = (\frac{300}{\sqrt{1000}})^2 = \frac{90000}{1000} = 90\ m^2$.

Obsah podstavy elevátora je 90 m^2.

Bodovanie:

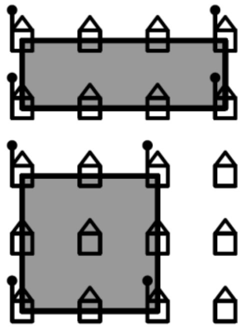
správny výsledok – 2b.; zistenie podobností trojuholníkov – 1b.; zistenie pomeru 1:3 – 1b.; zistenie rovnosti |AB|=|BP|=|PX| – 1b.

Poznámka:

V geometrických riešeniach bol potrebný narysovaný obrázok na plný počet bodov.

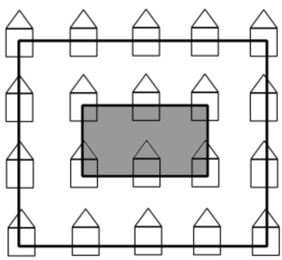
Úloha S4: Signál – *Opravoval Pavol „Kebab" Kebis*

Všetky domy v meste boli postavené v štvorčekovej sieti o strane 1 km ako na obrázku. Televízia mala rozmiestnené vysielače v niektorých domoch tak, že tvorili obdĺžnik so stranami zarovnanými so štvorčekovou sieťou (2 príklady sú vyznačené na obrázku). Vysielače boli vyrobené tak, že televízny signál bol len vnútri obdĺžnika ktorý tvorili. Televízny štáb si všimol, že ak bolo vo vnútri obdĺžnika *K* domov a presne na hranici obdĺžniku *N* domov, potom vedeli pomocou týchto dvoch údajov vypočítať plochu obdĺžniku v kilometroch štvorcových. Televízny štáb však tento vzorec zabudol. **Pomôž im taký vzorec nájsť – teda nájdi vzorec pre obsah *všeobecného* obdĺžnika ktorý je zarovnaný so štvorčekovou sieťou pre dané *N* a *K*.**



Ukážeme si dva spôsoby, akými sa dala táto úloha riešiť. Prvý spôsob použila väčšina z Vás. V meste nám vznikajú dva obdĺžniky. Jeden veľký vonkajší ohraničujúci signál, ktorého počet domov na obvode označujeme N. A druhý, menší, ktorý obsahuje domy ležiace vnútri obdĺžnika, teda tie, ktorých počet označujeme ako K.

Počty domov na stranách vonkajšieho obdĺžnika si pomenujme A a B, na stranách vnútorného obdĺžnika ako X a Y. Ľahko vidíme, že $X = A - 2$ a $Y = B - 2$, lebo vnútorný obdĺžnik je o 2 domy „kratší" v obidvoch rozmeroch.



Teraz si potrebujeme nejako vyjadriť počty domov N a K a obsah obdĺžnika S, ktorý chceme zistiť. Pre N ako obvod väčšieho platí vzťah:

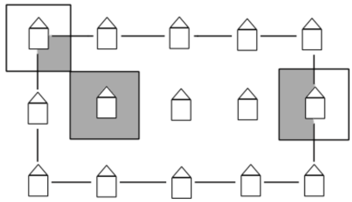
$$N = 2A + 2B - 4$$
$$N/2 = A + B - 2$$

2A a 2B, lebo každú stranu započítame dvakrát (obvod obdĺžnika) a –4, lebo každý zo štyroch rohov sme započítali dvakrát. Skúsme si teraz vyjadriť obsah obdĺžnika S. Všeobecný vzťah pre obsah obdĺžnika je súčin jeho dvoch strán. My dĺžky týchto dvoch strán vlastne už vieme: jedna je $(A-1)$ a tá druhá $(B-1)$ kilometrov. Medzi A domami je totiž vždy $A-1$ km a podobne je to aj s B. Takže

$$S=(A-1)\times(B-1)=AB-A-B+1$$

Ostáva už len vyjadriť K. K je počet domov menšieho obdĺžnika, ide teda o jeho obsah:

$$K=X\times Y=(A-2)\times(B-2)=AB-2A-2B+4$$
$$\mathrm{K}=(AB-A-B+1)-(A+B-2)+1$$
$$K=S-N/2+1$$



Takže platí: $\boldsymbol{S=K+N/2-1}$. A to je hľadaný vzťah.

Druhý spôsob, ktorý si ukážeme, je veľmi zaujímavý. Každému domčeku priradíme 1 km^2 poľa, ktorý s ním hraničí 0,5 km na štyri strany, ako na obrázku. Teraz môžeme rozdeliť domčeky na 3 kategórie:

Rohové – iba **1/4** ich pozemku patrí do obdĺžnika so signálom. **Krajové** – **1/2** ich pozemku má signál. **Vnútorné** – **celý** ich pozemok patrí do obdĺžnika so signálom.

Keďže sa žiadne dva pozemky neprekrývajú a každý kúsok obdĺžnika prislúcha niektorému domčeku, tak môžeme obsah vypočítať ako súčet tých častí pozemkov každého domčeku, ktoré majú signál. Rohové políčka sú 4 a zaujíma nás iba 1/4 ich pozemku. Tie teda do signálu prispievajú plochou 1 km^2. Krajových je $(N-4)$, sú to všetky na obvode okrem rohových. A 1/2 ich pozemku leží v obdĺžniku, teda ide o $(N-4)/2$ km^2. Vnútorných je napokon K a tie zarátavame celé. Z toho vyplýva vzťah:

$$S=4\cdot\frac{1}{4}+(\mathrm{N}-4)\cdot\frac{1}{2}+K=1+\frac{N}{2}-\frac{4}{2}+K=\boldsymbol{K+N/2-1}$$

A to je výsledný vzťah.

Bodovanie:

nakoľko väčšina z Vás použila prvý postup, uvádzam bodovanie pre ten: vzťah pre *N* – 2b.; vzťah pre *K* – 2b.; výsledok – 1b.

Úloha S5: Vypočúvanie – *Opravovali Tomáš Ganz a Martin „Maťo“ Starovič*

Strážnici zozbierali 6 svedkov, ktorí postupne opisovali zločinca. Opisovali jeho kapucňu, plášť, nohavice a topánky – štandardné časti uniformy bežného občana.

A: Zlodej mal hnedú kapucňu, biely plášť, červené nohavice a sivé topánky.
B: Bolo to inak, mal červenú kapucňu, modrý plášť, ružové nohavice a biele topánky!
C: Nie, veď mal predsa čiernu kapucňu, fialový plášť, žlté nohavice a modré topánky!
D: Neviem, akej farby mal nohavice, ale stopercentne neboli žlté. Kapucňu mal bielu, rovnako ako plášť a topánky.
E: Zločinec mal zelenú kapucňu, fialový plášť, sivé topánkami a zelené nohavice.

F: Kapucňu mal určite sivú! Ladila mu s modrým plášťom a topánkami. Nohavice ale mal úplne nevkusné – oranžové.
Strážnici zistili, že každý svedok povedal pravdivý výrok o farbe *práve jednej* časti uniformy. **Čo teda vedia s určitosťou povedať o páchateľovi?**

Máme 6 svedkov a 4 druhy oblečenia. Zo zadania vyplýva, že každý hovorí pravdu práve o jednom oblečení. Avšak žiadni traja nehovoria o jednej veci to isté. Preto musia existovať dve dvojice ľudí, čo sa zhodli na správnej farbe niektorého oblečenia. O kapucni a nohaviciach ale povedal každý niečo iné. Je teda zrejmé, že dvojice sa zhodujú v tvrdeniach o farbe plášťa a topánok. Teda pokiaľ C má pravdu, že topánky sú modré, tak aj F má v tomto pravdu.

Zaujíma nás, aká môže byť farba plášťa a topánok. Topánky môžu byť modré, biele alebo sivé. Plášť zase biely, modrý alebo fialový. Vyskúšajme všetky 3 možnosti farby topánok.

1. Ak sú topánky modré, ako vravia C a F... Z toho vyplýva, že farba plášťa musí byť biela, lebo C a F už vravia pravdu o topánkach, teda ich tvrdenia o tom, že plášť je fialový a modrý, sú nepravdivé. Farbu plášťa by teda správne určili A a D. Avšak v tomto prípade by nastal spor. D aj C by sa museli mýliť pri farbe nohavíc – z tvrdenia C totiž vyplýva, že nohavice nemôžu byť žlté a z tvrdenia D zase platí, že nohavice musia byť žlté. **Topánky teda nemohli byť modré**.

2. Ak sú topánky biele, ako vravia B a D... Títo dvaja sa teda mýlia vo farbe plášťa, a preto ten nebude ani modrý, ani biely. Potom plášť musí byť fialový, čo tvrdia C a E. D a C sa však opäť obaja mýlia vo farbe topánok, a teda prichádzame k rovnakému sporu, ako v prvom prípade. Takže s určitosťou vieme povedať, že **topánky nemohli byť ani biele**.

3. Ak sú topánky sivé, ako vravia A a E... Potom sa mýlia v plášti, ten teda nebude biely ani fialový, bude modrý. To tvrdia B a F. Tu si všimnime, že akokoľvek sa snažíme, nevieme ďalej presne určiť farbu nohavíc a kapucne, o ktorých nutne vravia pravdu C a D. Ich výroky sa však nijako nevylučujú, a preto nevieme určiť, ktorý má v čom pravdu. Vieme povedať iba toto: Ak budú nohavice žlté, kapucňa musí byť biela. Ak nohavice budú iné ako žlté, tak potom farba kapucne bude čierna.

Odpoveď: S určitosťou o páchateľovi vieme povedať, že mal sivé topánky a modrý plášť. Ak by mal žlté nohavice, tak musí mať bielu kapucňu. Ak by mal nohavice inej farby ako žltej, potom jeho farba kapucne bude čierna.

Bodovanie:
topánky sivé a plášť modrý – 3b.; overenie, že to môže nastať a že sú dve možnosti – 2b.