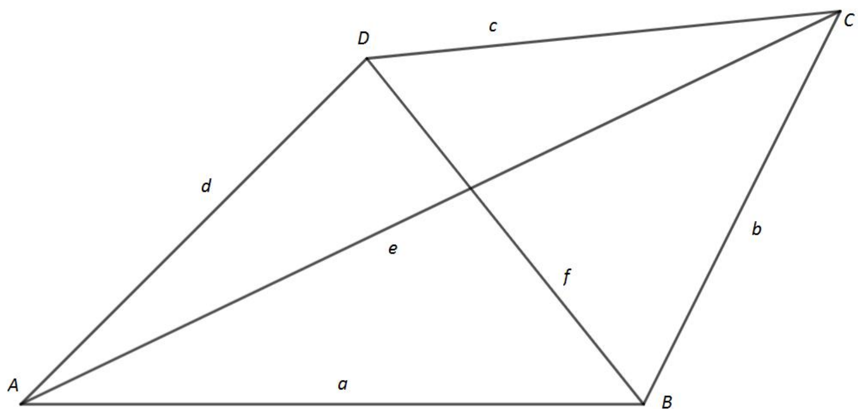
Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Plánik Temnoškľabu – *Opravoval Matej „Hovorca“ Hrmo*
Toto poschodie väzenia sa skladalo z chodieb, ktoré tvorili strany a uhlopriečky konvexného štvoruholníka. Chodby na obvode boli potiahnuté zeleným kobercom, uhlopriečkové zasa červeným. Tomas si všimol, že celková dĺžka červeného koberca bola menšia ako celková dĺžka zeleného koberca. **Platí to však pre každý konvexný štvoruholník? Nezabudni svoje riešenie zdôvodniť.** Poznámka: Konvexný štvoruholník je taký štvoruholník, ktorého všetky vnútorné uhly sú menšie ako 180°.

Väzenie sa skladá z chodieb, ktoré tvoria strany a uhlopriečky konvexného štvoruholníka. Označme si vrcholy tohto štvoruholníka ABCD. Strany štvoruholníka nech majú veľkosti a, b, c, d a uhlopriečky nech majú veľkosti e a f tak, ako na obrázku:



Chceme ukázať, že obvod tohto štvoruholníka (súčet dĺžok jeho strán) je vždy väčší, než súčet dĺžok uhlopriečok. Chceme teda ukázať, že platí $a + b + c + d > e + f$. Vidíme, že uhlopriečky a strany štvoruholníka ABCD tvoria 4 trojuholníky, konkrétne: Δ ABC, Δ BCD, Δ CDA a Δ DAB. Keďže ide o trojuholníky, musí pre ne platiť trojuholníková nerovnosť. Tá hovorí, že súčet dĺžok dvoch strán trojuholníka musí byť vždy väčší, ako dĺžka tretej strany. Pozrime sa, čo ako vyzerajú trojuholníkové nerovnosti pre spomínané trojuholníky:

Δ ABC má strany dĺžok a, b a e. Musí teda platiť $a + b > e$.
Δ BCD má strany dĺžok b, c a f. Musí teda platiť $b + c > f$.
Δ CDA má strany dĺžok c, d a e. Musí teda platiť $c + d > e$.
Δ DAB má strany dĺžok d, a a f. Musí teda platiť $d + a > f$.

Keď tieto nerovnosti sčítame, dostaneme $2a + 2b + 2c + 2d > 2e + 2f$. Po vydelení pravej a ľavej strany dvomi dostávame nerovnosť $a + b + c + d > e + f$. A to je presne to, čo sme chceli ukázať. Čiže pre každý konvexný štvoruholník kvôli trojuholníkovej nerovnosti platí, že jeho obvod je väčší ako súčet dĺžok jeho uhlopriečok.

Bodovanie:

ukázanie, že uhlopriečky a strany štvoruholníka tvoria trojuholníky Δ ABC, Δ BCD, Δ CDA a Δ DAB – 2,5b.; ukázanie a zostavenie trojuholníkových nerovností – 2b.; ukázanie platnosti tvrdenia – 0,5b.

Úloha S2: Skladovanie výbušniny – *Opravoval Miroslav „Myrec" Baláž*

Kombinátor bol rozdelený do malých kociek s rozmermi 1 × 1 × 1 cm. Pred vstupom do Temnoškľabu boli uskladnené v krabici s výškou 1 cm a štvorcovou podstavou, pričom táto krabica nimi bola úplne naplnená. Aby však unikli zraku dozorcov, premiestnili ich všetky do dvoch krabíc ktoré sa dali lepšie schovať: modrej v tvare kvádra s rozmermi 1 × 1 × 2 cm a červenej v tvare hranola s podstavou 2 × 2 cm. Modrú krabicu pritom zaplnili celú (teda dali do nej dve kocky). **Dokážte, že nech boli strana podstavy pôvodnej krabice a výška červenej krabice akékoľvek, po preložení všetkých kociek nebola červená krabica zaplnená celá (ešte by sa do nej dali naukladať nejaké kocky).**

V zadaní sa píše, že máme kocky $1 \times 1 \times 1$, ktoré boli najprv uložené v škatuli s rozmerom $1 \times A \times A$. Nevieme síce presný rozmer, ale vieme, že bola štvorcová, a že bola naplnená do plna. Takže kociek v nej bolo $A \cdot A$.

Potom to preukladali do škatule $2 \times 2 \times B$ (červenej) a ešte dve kocočky do $1 \times 1 \times 2$ (modrej). Ak by teda boli aj tieto škatule plné, bolo by kociek $4 \cdot B + 2$. Ak by sme ale na červenej mali nekompletné poschodie, tak by sa počet kociek nedal zapísať ako $4 \cdot B + 2$.

A to máme dokázať, či existuje taký počet kociek, ktorý sa dá zapísať aj ako $A \cdot A$ (je druhou mocninou nejakého čísla) aj ako $4 \cdot B + 2$.

Ak je A nepárne, tak aj $A \cdot A$ je nepárne. Lenže $4 \cdot B + 2$ je vždy párne, takže takto to nepôjde.

Čo ak by bolo A párne? To vyzerá nádejnejšie. Ale len na prvý pohľad. Každé párne číslo vieme napísať ako 2-krát-niečo, teda $A = 2m$. Potom ale $\boldsymbol{A \cdot A} = 2m \cdot 2m = \boldsymbol{4 \cdot m \cdot m}$. Opäť chceme, aby sa to rovnalo $4 \cdot B + 2$. Napíšeme si rovnosť $\boldsymbol{4 \cdot m \cdot m = 4 \cdot B + 2}$.

Ľavá strana tejto rovnice je deliteľná štyrmi, pravá zjavne nie (dáva zvyšok 2). To ale znamená, že takáto rovnosť nikdy nemôže platiť. Ukázali sme, že **neexistuje číslo, ktoré by sa dalo zapísať aj ako $\boldsymbol{A \cdot A}$ aj ako $\boldsymbol{4 \cdot B + 2}$**. To znamená, že neexistuje taký počet kociek, ktorým by sme vedeli zaplniť doplna aj štvorcovú krabicu, aj modrú s červenou dokopy.

Bodovanie:

za pochopenie, čo vlastne treba ukázať – 1b.; ak ste napísali správnu rovnicu, alebo ste ju slovne opísali – 1b.; ak ste rozdelili príklad na párne a nepárne *A* – 1b.; za vyriešenie rovnice pre nepárne *A* – 1b.; za vyriešenie rovnice pre párne *A* – 1b.

Úloha S3: Strážnici – *Opravovali Adam „Santa“ Šánta*
Tomáš Ganz a Erik Řehulka

Vo väzení pracovali ľudskí a robotickí strážnici. Strážnici boli zavretí v operačnej miestnosti, kde sa pozerali na obrazovky. Každú obrazovku sledoval práve jeden strážnik. Každý strážnik pritom sledoval rovnako veľa obrazoviek ako ľubovoľný iný strážnik. Keď sa obmedzoval rozpočet väzenia, 10 strážnikov dostalo výpoveď a ich obrazovky si rovnomerne rozdelili ostatní strážnici, pričom každý strážil o 1 obrazovku viac. Po pár týždňoch však prišla epidémia počítačového vírusu a všetkých 15 robotických strážnikov prestalo fungovať. Ich obrazovky si ľudskí kolegovia opäť rozdelili rovnomerne, takže každému pribudli 3 obrazovky na stráženie. **Koľko strážnikov bolo vo väzení na začiatku a koľko teraz?**

Základným faktom, ktorý si musíme uvedomiť je, že **počet obrazoviek sa nemení**. Na začiatku máme n strážnikov a každý stráži A obrazoviek. Pretože platí, že **počet obrazoviek je vždy počet pracovníkov krát počet obrazoviek, ktoré sleduje jeden pracovník**, celkový počet obrazoviek bude $n \cdot A$.

Pozrime sa na situáciu po prvom prepúšťaní. Ak sme 10 strážnikov prepustili, zostalo nám ich $n - 10$. Zo zadania vyplýva, že každý strážnik po prvom prepúšťaní stráži o jednu obrazovku viac, teda $A + 1$ obrazoviek. Pretože sa však celkový počet obrazoviek nezmenil, môžeme zapísať do rovnosti počet obrazoviek pred prepúšťaním a po ňom:

$$n \cdot A = (n - 10) \cdot (A + 1)$$

Po ďalšom prepúšťaní sa nám počet pracovníkov zmenšil na $(n - 10) - 15 = n - 25$ strážnikov. Každý z nich bude mať o 3 obrazovky viac, ako po prvom prepúšťaní, takže stráži $(A + 1) + 3 = A + 4$ obrazovky. Počet obrazoviek sa stále nemení, takže sa bude rovnať počtu obrazoviek na začiatku (a aj počtu obrazoviek po prvom prepúšťaní).

$$n \cdot A = (n - 25) \cdot (A + 4)$$

Z uvedených rovníc môžeme zostaviť sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi, ktorú už jednoducho vyriešime. Napríklad takto:

$$\begin{aligned}
n \cdot A &= (n - 10) \cdot (A + 1) \\
n \cdot A &= n \cdot A + n - 10 \cdot A - 10 \\
0 &= n - 10 \cdot A - 10 \qquad /\cdot(-4) \\
\mathbf{0} &\mathbf{= -4 \cdot \boldsymbol{n} + 40 \cdot \boldsymbol{A} + 40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n \cdot A &= (n - 25) \cdot (A + 4) \\
n \cdot A &= n \cdot A + 4 \cdot n - 25 \cdot A - 100 \\
\mathbf{0} &\mathbf{= 4 \cdot \boldsymbol{n} - 25 \cdot \boldsymbol{A} - 100}
\end{aligned}$$

Sčítaním zvýraznených rovníc dostávame:

$$\begin{gathered}
0 = 4 \cdot n - 25 \cdot A - 100 \\
\underline{0 = -4 \cdot n + 40 \cdot A + 40} \\
0 = 15 \cdot A - 60 \\
15 \cdot A = 60 \\
\boldsymbol{A = 4}
\end{gathered}$$

Dosadením tejto hodnoty do jednej z rovníc pre počet obrazoviek, uvedených na začiatku, dostaneme:

$n \cdot A = (n - 10) \cdot (A + 1)$
$4 \cdot n = 5 \cdot (n - 10)$
$4 \cdot n = 5 \cdot n - 50$
$\boldsymbol{n = 50}$

$n \cdot A = (n - 25) \cdot (A + 4)$
$4 \cdot n = 8 \cdot (n - 25)$
$4 \cdot n = 8 \cdot n - 200$
$\boldsymbol{n = 50}$

Keďže bolo dokopy prepustených $10 + 15 = 25$ strážnikov, na konci nám ich zostane $50 - 25 =$ **25 strážnikov**.

Bodovanie:
za fakt, že počet obrazoviek sa nemení – 2b.; za logickú a numerickú správnosť rovníc – 2b.; za správny výsledok – 1b.

Úloha S4: Otváranie ciel – *Opravovali Ľudmila „Ľudka“ Šimková Martin „Panda“ Svetlík*

Vo väzení bolo 1000 ciel, ktoré boli očíslované číslami 1, 2, 3, 4, ..., 1000. Neznámy chcel otvoriť iba cely s takými číslami, aby sa ani jedno z čísel zatvorených ciel nerovnalo súčinu iných dvoch čísel zatvorených ciel. **Koľko najmenej ciel musel neznámy otvoriť? Akým spôsobom to mohol urobiť?**

V tejto úlohe ste mali vyhraté, ak ste si uvedomili, že keď máme trojicu čísel {X, Y, X·Y} (napríklad {5, 9, 45}) tak z takejto trojice musíme aspoň jedny dvere otvoriť. Zoberme si teraz číslo 2. To sa nachádza v skoro 500 takýchto trojiciach – {2, 3, 6}, {2, 4, 8}, {2, 5, 10},...{2, 500, 1000}.

Ak by sme teda neotvorili dvere č.2, museli by sme otvoriť z každej z tých trojíc niektoré iné dvere. Áno, ak by sme otvorili dvere č.6, vyriešili by sme tým aj trojicu {2, 3, 6} aj {2, 6, 12}, ale stále by sme museli otvoriť vyše 250 dverí (cca 500 trojíc, a jednými dverami vyriešim najviac dve z nich). Takže asi sa nám oplatí otvoriť dvere č. 2.

Podobnú úvahu vieme spraviť pre čísla 3, 4, 5, 6...

Okej, ale to by sme vedeli podobnú úvahu spraviť pre každé číslo, niekde musíme prestať. Predstavme si, že už sme otvorili všetky malé čísla a sme pri čísle 30. Už s ním máme len trojice {30, 31, 930}, {30, 32 , 960}, {30, 33, 990}. Väčšie násobky 30 už nie sú čísla do 1000, takže také dvere nemáme. Otvoríme aj dvere číslo 30 – stále je to lepšie ako otvoriť 3 iné dvere z tých troch trojíc. Ideme na 31. Máme s ním už len jednu možnú trojicu {31, 32, 992}. Z tejto už je teda jedno, ktoré dvere otvoríme. Tak napríklad otvoríme dvere 31. Potom nám ostali nám už len dvere, z ktorých každá dvojica má súčin väčší ako 1000, takže k nej určite nemáme tretie dvere. A to sme chceli.

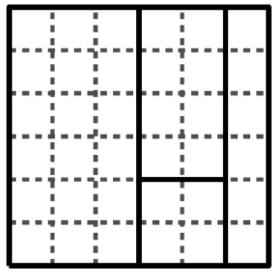
Ešte nám ostala jednotka, ktorú môžeme nechať zatvorenú, lebo súčin musia tvoriť troje dvere, a každé dvere majú iné číslo, takže trojica {1, X, X} neexistuje.

Otvorili sme teda dvere od 2 po 30 (29 kusov) + ktorékoľvek z trojice {31, 32, 992} – teda spolu 30 dverí.

Bodovanie:
2 body sa dali získať za spôsob založený na prvočíslach a zložených číslach (ktorý síce väčšinou fungoval, ale otvorili ste priveľa dverí) 4 body ste mohli získať za spôsob, kde otvárame dvere od najmenších čísel až po hranicu 31. V oboch prípadoch bola väčšia časť

bodov za vysvetlenie tohto spôsobu a menšia za vyriešenie dverí číslo 1. Zvyšný bod ste mohli získať za dôkaz, prečo to na menej otvorených dverí nejde.

Úloha S5: Východ – *Opravoval Juraj „Juro" Pavlovič*



Na ovládacom paneli bol štvorec 6 × 6 rozdelený na štvorčeky 1 × 1. Môžeme naň ľubovoľne umiestňovať útvary – obdĺžniky či štvorce s dĺžkami strán 1, 2, 3, 4, 5 alebo 6. Nemôžeme umiestniť dva útvary s rovnakými dĺžkami strán (napríklad ak použijeme obdĺžnik 2 × 3, ďalší 2 × 3 ani 3 × 2 nemôžeme použiť, ale napríklad 6 × 1 alebo 2 × 2 áno). Cieľom je pozakrývať celý pôvodný štvorec aspoň dvoma útvarmi. **Aký je najmenší možný rozdiel obsahov najväčšieho a najmenšieho použitého útvaru? Nezabudni pre tento rozdiel dokázať, že je najmenší možný a nájsť konkrétny príklad rozmiestnenia útvarov.** Poznámka: Pre príklad na obrázku je rozdiel najväčšieho a najmenšieho útvaru: 3 × 6 – 2 × 2 = 18 – 4 = 14.

Najprv si vypíšme, aké rozmery útvarov vôbec prichádzajú do úvahy – Tab. 1. Zo spôsobu usporiadania tabuľky je zrejmé, že (ako prikazuje zadanie) sme žiaden útvar nevynechali a ani sa nám žiaden neopakuje. Obsahy týchto 21 útvarov sú: **1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 8, 9, 10, 12, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36**. Iba obsahy 4, 6 a 12 sa vyskytli každý dvakrát, ostatné sú zastúpené každý iba raz.

1×1,	1×2,	1×3,	1×4,	1×5,	1×6;
	2×2,	2×3,	2×4,	2×5,	2×6;
		3×3,	3×4,	3×5,	3×6;
			4×4,	4×5,	4×6;
				5×5,	5×6;
Tab. 1					6×6;

Celková plocha, ktorú potrebujeme zakryť, je 6×6 = **36 štvorčekov**. Pôjdeme na to postupne od najväčších útvarov a vždy sa budeme zaujímať o situáciu v takomto tvare...

Čo keby bol 36 najväčším použitým útvarom? Zakryl by celú plochu a neostalo by miesto pre žiaden ďalší, hoci zadanie si pýta *aspoň dva útvary*. Takže útvar 36 nepoužijeme.

Čo keby bol 30 najväčším použitým útvarom? Ostalo by 6 políčok, takže najmenší rozdiel medzi najväčším a najmenším útvarom by mohol byť 30–6=**24**. Ak neskôr nájdeme prípad s menším rozdielom ako 24, bude to znamenať, že túto možnosť treba tiež vylúčiť.

Čo keby bol 25 najväčším použitým útvarom? Ostávalo by 11 políčok, ktoré vieme zakryť ako 6+5, takže najmenší rozdiel by mohol byť 25–5=**20**. To je menej ako 24, takže predošlý útvar (30) tiež vylučujeme. Bolo síce viac možností, ako zakryť 11 políčok (napr. 1+4+6), nás však vždy zaujíma prípad, ktorý používa čo najmenej útvarov s čo najviac podobnými obsahmi. Pretože čím je útvarov viac, tým menší musí byť ten celkom najmenší (a tým väčší bude rozdiel medzi ním a tým najväčším).

Čo keby bol 24 najväčším použitým útvarom? Zvyšných 12 políčok by sa dalo vyplniť jediným útvarom a rozdiel by bol 24–12=**12**. Vylučujeme teda predošlý útvar 25.

Čo keby bol 20 najväčším použitým útvarom? Zvyšných 16 políčok nemôžeme vyplniť ako 8+8, pretože máme k dispozícii iba jeden útvar s obsahom 8. Ďalšia najlepšia možnosť („najlepšia" = využívajúca iba 2 útvary s čo najpodobnejším obsahom) je 10+6. Takže v tomto prípade máme najmenší rozdiel 20–6=**14**. Keby sme použili až 3 ďalšie útvary, museli by to byť 6+6+4, čo je horšia možnosť ako 10+6. Každopádne sme nenašli lepšiu možnosť ako bola predošlá s rozdielom 12.

Čo keby bol 18 najväčším použitým útvarom? Zvyšných 18 políčok sa dá dvoma útvarmi najlepšie vyplniť ako 10+8, teda s rozdielom 18–8=**10**. Troma útvarmi by to bolo už iba horšie – keby sa aj dalo mať 6+6+6 (čo sa nedá), stále by to znamenalo rozdiel 18–6=12.

Čo keby bol 16 najväčším použitým útvarom? Zvyšných 20 políčok sa dá vyplniť dvoma útvarmi ako 12+8, čo znamená rozdiel 16–8=**8**. Doposiaľ najlepší výsledok, všetky predošlé možnosti môžeme vylúčiť. Tri útvary by museli byť 6+6+8, čo je horšia možnosť.

Čo keby bol 15 najväčším použitým útvarom? Tu sa musíme už zapodievať aj konkrétnym umiestňovaním útvarov. Útvar 15 má v jednom rozmere 5 políčok, čo znamená, že niekde na ovládacom paneli musí ostať priestor so šírkou 1 políčko. Na jeho vyplnenie budeme preto určite potrebovať útvar s rozmerom 1, takže 1×6 alebo ešte menší. Tým pádom najmenší rozdiel bude 15–6=**9** (alebo ešte väčší). „Neporazili“ sme predošlú možnosť (rozdiel 8), preto útvar 15 vylučujeme.

Čo keby bol 12 najväčším použitým útvarom? Na zvyšných 24 políčok už nám dva útvary nebudú stačiť (museli by byť 12+12, ale také nemáme 3 naraz k dispozícii), potrebujeme tri. Najlepšou možnosťou je 10+8+6, alebo 12+6+6, obe s rozdielom 12–6=**6**. Nový najmenší rozdiel!

Čo keby bol 10 najväčším použitým útvarom? Tri najbližšie menšie útvary sú 9+8+6, čo nestačí na zakrytie 26 políčok, takže budeme potrebovať aspoň 4 útvary. Ako najlepšiu možnosť nájdeme 9+8+5+4=26, čo znamená rozdiel 10–5=**5**.

Čo keby bol 9 najväčším použitým útvarom? Aj tu nájdeme najlepšiu možnosť, ako zakryť zvyšných 27 políčok: 8+6+5+4+4=27, čo znamená rozdiel 9–4=**5**.

Čo keby bol 8 najväčším použitým útvarom? Zase najlepšia možnosť pre zvyšných 28 políčok (6+6+5+4+4+3=28) nám dá ten istý rozdiel 8–3=**5**.

Útvar 6 ani žiaden menší už nemôže byť najväčším použitým, lebo aj keby sme použili všetky nižšie, nestačilo by to na zakrytie 36 políčok (6+6+5+4+4+3+2+1=31).

Na záver je nutné ešte overiť, či sa dá aspoň jedna z hore uvedených možností (s rozdielom 5) reálne poukladať do štvorca 6×6. Tento posledný krok ponechávam na čitateľa, v skutočnosti sa dajú usporiadať všetky 3 možnosti: 8+6+6+5+4+4+3, alebo 10+9+6+6+5, alebo 9+8+6+5+4+4.

Bodovanie:
akýkoľvek správny dôkaz, prečo je rozdiel 5 najmenší možný – 5b.; rozdiel 6 – max 3b.; rozdiel 8 – max 2b.

p-mat

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat