Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

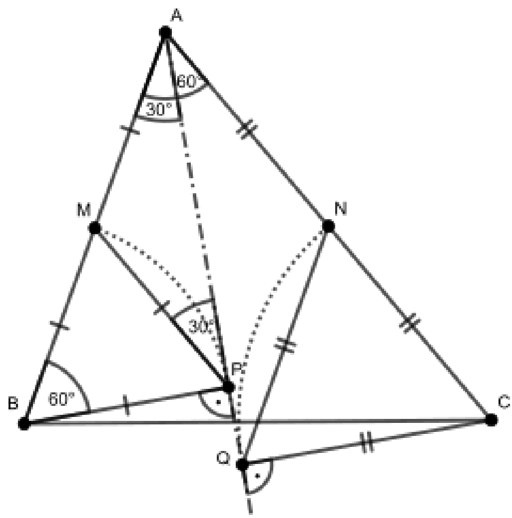
PIKOMAT

36. ročník www.pikomat.sk školský rok 2018/2019

Vzorové riešenia 3. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Bake-off na play-off – *Opravoval Marián Poturnay*

Trénerova manželka pečie perníky v tvare rôznostranných trojuholníkov *ABC* so stranou *BC* dlhou 6 cm a uhlom *BAC* s veľkosťou 60°. Na strane *AB* zvolila bod *M* tak, že os uhla *BAC* sa dotýkala kružnice so stredom v bode *B*, ktorá obsahovala bod *M*. Podobne zvolila na strane *AC* bod *N* tak, že os uhla *BAC* sa dotýkala kružnice so stredom v bode *C*, ktorá obsahovala bod *N*. **Aká bola dĺžka úsečky *MN*?**



Táto úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. V tomto vzorovom riešení si ukážeme, ako sa táto úloha dala vyriešiť len pomocou uhlov a dĺžok.

Zadanie od nás vyžaduje, aby sme zistili niečo o úsečke MN. Bolo by preto fajn zistiť, čo sú body M a N zač. Pozrime sa najprv na bod M.

O dotyčnici ku kružnici je známe, že s kružnicou má spoločný iba jeden bod. Navyše je táto dotyčnica kolmá na polomer obsahujúci tento dotykový bod. Ak si teda označíme P dotykový bod kružnice so stredom v B, ktorá sa dotýka osi uhla BAC, tak zistíme, že **uhol $\boldsymbol{APB}$ je pravý.**

Vďaka tomu, že $|\sphericalangle BAC| = 60°$, a tomu, že AP je os tohto uhla dostávame $|\sphericalangle BAP| = 30°$. Preto vieme v trojuholníku BAP dopočítať veľkosť tretieho uhla: $\boldsymbol{|\sphericalangle PBA| = 60°}$.

Zo zadania ďalej vieme, že body M a P ležia na kružnici so stredom v B. To znamená, že $|BP| = |BM|$, a tak je trojuholník BMP rovnoramenný. Keďže ale $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PBM| = 60°$, tak vďaka tomuto ľahko dopočítame, že $|\sphericalangle BMP| = |\sphericalangle BPM| = 60°$, odkiaľ máme, že **trojuholník $\boldsymbol{BMP}$ je rovnostranný**.

Spojením informácií $|\sphericalangle APB| = 90°$ a $|\sphericalangle BPM| = 60°$ vieme vypočítať $|\sphericalangle APM| = 30°$. Súčasne máme už aj informáciu, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle MAP| = 30°$, z čoho dostávame, že **trojuholník $\boldsymbol{MAP}$ je rovnoramenný** so základňou AP.

Takže máme rovnostrannosť trojuholníka BMP a rovnoramennosť trojuholníka MAP. Preto vieme zapísať informácie o dĺžkach: $|MA| = |MP| = |MB|$. Spolu s tým, že M leží na úsečke AB, tak máme, že **M je stredom úsečky AB**.

Zopakovaním podobných úvah sa vieme dopracovať k tomu, že **N je stredom úsečky AC**. Body M a N sú tak stredmi strán trojuholníka ABC, a preto **je úsečka MN strednou priečkou** tohto trojuholníka, tou, ktorá spája stredy strán AB a AC.

O strednej priečke je známe, že je rovnobežná s jednou zo strán trojuholníka a jej dĺžka je v porovnaní s touto stranou polovičná. V tomto prípade je MN stredná priečka trojuholníka ABC rovnobežná so stranou BC. Tu vytiahneme poslednú informáciu zo zadania ($|BC| = 6$ cm) a dostaneme, že **dĺžka úsečky MN je 3 cm.**

Bodovanie:
za ukázanie, že trojuholník BMP je rovnostranný – 1,5b.; za ukázanie, že trojuholník MAP je rovnoramenný – 1,5b.; za využitie týchto dvoch informácií na ukázanie, že M je stredom úsečky AB – 1b.; za využitie podobných myšlienok na ukázanie, že N je stredom úsečky AC – 0,5b.; za dopočítanie, že dĺžka úsečky MN je 3 cm – 0,5b.

Úloha S2: Podozriví – *Opravoval Tomáš Ganz*

V miestnosti sa nachádzalo štvorschodové schodisko, kde každý schod mal rovnakú výšku. Na jednotlivé schody na schodisku sa postavili štyria podozriví, ktorí boli očíslovaní jeden (na najnižšom schode) až štyri (na najvyššom schode). Pri pohľade kolmo zboku na schodisko bolo vidno, že najvyššie siahal podozrivý číslo tri. Podozriví číslo dva a štyri siahali do 5/6 výšky tela tretieho (merané od spodku nôh tretieho, nie od spodku schodiska) a podozrivý číslo jeden len do 2/3 výšky tela tretieho. Potom si na schodisku vymenili poradie a zrazu siahali všetci rovnako vysoko. **Aký vysoký bol jeden schod, ak bol najnižší podozrivý vysoký 135 cm?**

Na začiatok je výborné si určiť najnižšieho podozrivého, aby sme vedeli, ktorý z nich bude mať výšku 135 cm. Označme si podozrivých A, B, C, D pričom na najnižšom schode bude A a na najvyššom D. Výšku schodu si označíme x. Zo zadania vieme:

B>D - siahajú rovnako vysoko, ale B je o dva schody nižšie
C>D - C je nižšom schode a aj tak dosahuje vyššie ako D

Tým pádom najnižší bude A alebo D. Pokúsme sa teraz rozostaviť ich tak, aby všetci siahali rovnako vysoko. Medzi B a D budeme potrebovať vždy jedného človeka, nakoľko už pri prvom rozostavení siahajú do rovnakej výšky s rozdielom dvoch schodov. Jeden podozrivý medzi nimi zaistí, aby siahali do rovnakej výšky. C potrebujeme mať určite na nižšom schode ako B aj D, lebo už pri prvom rozostavení prevyšuje obidvoch. Jediné možné poradie bude C, B, A, D. Teraz máme všetkých v rovnakej výške, pričom D je na najvyššom schode a bude nám predstavovať najnižšieho podozrivého, ktorý meria 135 cm.

Pri prvom rozostavení D siahal do 5/6 výšky C (bez schodov, na ktorých C stál) a bol na štvrtom schode. Z toho nám vyjde rovnica $\mathbf{135 + 4x = 5/6 \cdot C}$.Teraz sa pozrieme na súčasné poradie, C je na prvom schode a D na štvrtom, a keďže siahajú do rovnakej výšky dostaneme $\mathbf{135 + 4x = C + x}$. Dostávame sústavu rovníc o dvoch neznámych- výšky C a výšky schodu. Upravením rovníc dostaneme výslednú výšku schodu x=15. **Výška jedného schodu je 15 cm.**

Bodovanie:
za nájdenie rozostavenia podozrivých, kde všetci dosahujú rovnakú výšku – 3b.; za zistenie výšky jedného schodu – 2b.

Úloha S3: Kasička – *Opravoval Dávid „Puding" Mišiak*

Na jednom zo stretnutí bolo prítomných niekoľko ľudí (aspoň dvaja). Všetci sedeli za jednou stranou obdĺžnikového stola a mali pri sebe niekoľko jednoeurových mincí. Ten, ktorý mal mincí najmenej, sedel úplne vľavo. Pre každého z ostatných potom platilo, že mal práve o jednu mincu viac ako ten hneď naľavo od neho. Prispievanie do kasy prebiehalo nasledovne:

- Na začiatku dal Tréner kasu človeku na ľavom konci stola. Ten do nej vhodil mincu a posunul ju človeku, ktorý od neho sedel o jedno miesto vpravo.
- Zakaždým, keď niekto dostal kasu, vhodil do nej jednu svoju mincu a posunul ju človeku, ktorý od neho sedel o jedno miesto vpravo.
- Keď kasa došla až na pravý koniec stola a posledný do nej vhodil mincu, preniesol Tréner kasu opäť na ľavý koniec stola a išlo sa odznova.

V istom momente sa stalo, že niektorý človek bol na rade s prispievaním, no nemal už žiadnu mincu na vhodenie do kasy. Tréner si všimol, že v tej chvíli bolo v kase presne štyrikrát viac mincí, než mal vtedy človek, ktorému zostávalo najviac mincí. **Koľko ľudí sedelo pri stole? Koľko mincí mal na začiatku ten, čo sedel úplne vľavo?**

Teším sa, že túto úlohu vyriešila (alebo takmer vyriešila) drvivá väčšina z Vás. Aj tak sa však poďme pozrieť, ako je najlepšie ju riešiť.

Mohli ste postrehnúť, že v zadaní je použité slovo „niekoľko" presne dvakrát – pri stole sedelo *niekoľko* ľudí a každý z nich mal *niekoľko* mincí (dané počtom mincí toho naľavo od neho). Mohlo by teda byť užitočné si tieto dve neznáme – počet ľudí a počet mincí človeka najviac vľavo – označiť písmenami, aby sa nám s nimi lepšie pracovalo. To spravila väčšina z vás, hoci, musím sa priznať, prekvapil ma počet písmenkových kombinácii, ktoré ste na označenie vymysleli :). Narátal som až šestnásť označení, pričom najčastejšie bolo *n*, *x*, teda ***n* = počet ľudí a *x* = počet mincí človeka vľavo**. Toto označenie použijeme aj vo vzorovom riešení. Vyskytli sa však všetky písmená *a*, *b*, *k*, *l*, *ľ*, *m*, *n*, *p*, *x*, *y*, *z* a cenu za najkreatívnejšiu dvojicu odo mňa získava kombinácia *ľ*, *y*.

Ale späť k problému. Očividne mal **človek naľavo najmenej mincí** (každý ďalší mal vždy o jednu viac ako ten predchádzajúci) a začíname pri ňom, je teda jasné, že on bol práve ten, **ktorému sa minuli mince**. To sa stalo práve vtedy, keď už mal odovzdaných *x* mincí a bol na rade s odovzdaním ďalšej (tak to hovorí zadanie). Vieme preto, že aj každý z ostatných odovzdal *x* mincí, lebo **prebehlo *x* „kolečiek"**. Celkovo teda do kasičky prišlo $x \cdot n$ mincí.

Ďalší údaj spomínaný v zadaní je počet mincí, ktoré ostali v tej chvíli najbohatšiemu. Ním bol zjavne stále ten úplne vpravo. Koľko mal teda mincí? Prebehlo niekoľko celých kolečiek, takže vidíme, že ten vľavo ich mal v tejto chvíli 0, druhý zľava 1, tretí zľava 2, a tak ďalej, až n-tý zľava, **čiže posledný, ich mal n - 1** (vidíte tam ten vzor?).

Nuž a zadanie nám kladie jednoduchú podmienku, že v kasičke bolo na konci presne štyrikrát viac mincí, ako ich mal ten vpravo. My sme oba tieto počty vyjadrili písmenami, dostávame tak rovnicu

$$x \cdot n = 4 \cdot (n - 1),$$

ktorú väčšina z Vás šikovne upravila a tak našla riešenia. Skúsme sa však nad rovnicou pre zmenu zamyslieť bez akýchkoľvek úprav, pričom máme na pamäti, že x aj n sú prirodzené čísla (zo zadania vyplýva, že to nemôžu byť nuly). Všimneme si, že n je na oboch stranách. A po lepšom pohľade si uvedomíme, že x je vďaka tomu akosi limitované. Konkrétne, môže x byť 4? Nemôže, lebo potom by sme vľavo mali štyrmi vynásobené n a vpravo štyrmi vynásobené číslo menšie ako n, čo sa nemôže rovnať. Z toho istého dôvodu **nemôže byť x ani väčšie ako štyri – naľavo by boli oba činitele väčšie ako činitele napravo** (teda $x > 4$ a $n > n - 1$), takže by sa súčiny nemohli rovnať.

Ale tým sme si veľmi znížili počet možností, lebo x už musí byť jedno z čísel 1, 2, 3. Vyskúšame ich všetky:

- $x = 1$. Potom rovnica prechádza do tvaru $n = 4 \cdot n - 4$, čo je po úprave $4 = 3 \cdot n$. Celočíselné riešenie pre n žiaľ neexistuje.
- $x = 2$. Vtedy dostávame $2 \cdot n = 4 \cdot n - 4$, čo ľahko upravíme na $4 = 2 \cdot n$. Tejto rovnici zjavne vyhovuje $n = 2$.
- $x = 3$. Rovnica vraví, že $3 \cdot n = 4 \cdot n - 4$, alebo po úprave $4 = n$.

Dostali sme tak dvoch kandidátov na riešenie: $n = 2$, $x = 2$ a $n = 4$, $x = 3$. Ak sa vrátime k pôvodnej úlohe a vyskúšame použiť tieto hodnoty, zistíme napríklad, že v prvom prípade budú v kasičke 4 mince (poslednému, teda druhému, zostane 1 minca) a v druhom prípade 12 mincí (poslednému = štvrtému ostanú 3 mince). Skrátka, všetko sedí, takže buď **boli ľudia dvaja, pričom ten vľavo mal na začiatku dve mince**, alebo **boli štyria a ten vľavo mal tri mince**.

Robiť v tejto úlohe skúšku správnosti nie je úplne nevyhnutné (nemá sa tam už veľmi čo pokaziť). Niektorí z Vás však napríklad úlohu riešili trochu inak a dosádzali za *n*, pričom vtedy Vám skúška mohla pomôcť všimnúť si podmienku v zadaní, že $n \geq 2$. Takže moje odporúčanie znie – predsa len sa tá skúška s pôvodným zadaním oplatí spraviť :).

Bodovanie:

za zistenie, že prispievanie skončí na prvom a posledný vtedy bude mať ešte $n - 1$ mincí – 1 b.; za zostavenie rovnice a prácu s ňou – 1 b.; za nájdenie dvoch riešení – 2b. (po 1b. za každé); za objasnenie, prečo iné riešenia nemôžu existovať – 1 b.

Úloha S4: Príprava zápasu – *Opravoval Juraj Pavlovič*
Zápas pripravovalo 30 robotníkov, na ktorých dohliadalo 15 kontrolórov. Každý robotník mal rád niektorých 6 kontrolórov. **Vieme *vždy* vybrať skupinu 5 kontrolórov tak, že každý robotník má rád *aspoň* jedného z nich? Ak áno, ako? Ak nie, prečo?**

Slová „robotník“ a „kontrolór“ si skrátime na *R* a *K*. Keď niektorý R má niektorého K rád, budeme hovoriť, že mu dal *lajk*, resp. že K ten lajk dostal.

Každý z 30 R udelil 6 lajkov, takže dokopy je v obehu 30·6=180 lajkov. Potiažou je, že vôbec netušíme, ktorý K dostal koľko lajkov a od koho. Napriek tomu zadanie chce, aby sme tých 5 K vedeli vybrať *vždy*! Takže to musíme zvládnuť pri *akomkoľvek* rozdelení lajkov – teda musíme počítať aj s úplne náhodným či dokonca nepriaznivým rozdelením lajkov.

Niektorý K musí byť najobľúbenejší – mať najviac lajkov. Prípadne môžu byť najobľúbenejší aj viacerí, ak majú narovnako lajkov. Koľko lajkov má najobľúbenejší K? Keby všetci 15-ti mali najmenej, ako sa len dá, mal by každý 180/15 = 12 lajkov. Takže **najobľúbenejší K má aspoň 12 lajkov**. Pozor: toto neznamená, že každý K musí mať aspoň 12 lajkov – pokojne môžu mať niektorí aj 0 lajkov, a potom by iní mali o to viac. Každopádne toho najobľúbenejšieho K si vyberieme ako prvého a máme istotu, že sme vyhoveli aspoň 12 R. Týchto 12 R teraz „odložíme nabok“, teda prestaneme brať do úvahy aj ich ostatné lajky, ktoré dali ostatným K, a ideme ďalej.

Ostáva 18 R, ktorým sme zatiaľ nevyhoveli a 14 K, z ktorých ešte máme na výber. *Pozorný čitateľ si tu všimne určitú logickú nepresnosť – ja sa k nej vrátim na konci riešenia.* Týchto 18 R bude mať opäť svojho najobľúbenejšieho K. Spolu udelili 18·6=108 lajkov 14-tim K. To znamená, že ak by všetci K dostali najmenej ako sa len dá, dostali by každý 108/14 = 7,71 lajkov. Ani to sa vlastne takto presne nedá, takže niektorí dostali 7 a niektorí 8 lajkov (nemohli dostať všetci 7, lebo 14·7 je iba 98 a my máme lajkov až 108). Takže **v očiach zvyšných 18 R najobľúbenejší K má aspoň 8 lajkov**. Tohto K vyberieme, jeho 8 fanúšikov opäť „dáme nabok“ – už sme vyhoveli 12+8 = 20 robotníkom – a pokračujeme.

Ostáva 10 R a 13 K. Opäť hľadáme najobľúbenejšieho a pomôžeme si výpočtom 10·6 = 60 lajkov, a tým pádom 60/13 = 4,62 lajkov. Takže ak by chceli mať čo najmenej, niektorí by mali 4 a niektorí 5. Každopádne ten **v očiach zvyšných 10 R najobľúbenejší K má aspoň 5 lajkov**. A situácia sa opakuje: tohto K aj jeho 5 fanúšikov „dáme nabok“ a...

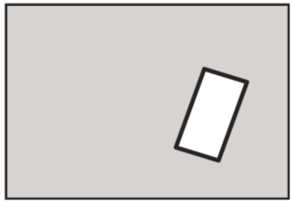
Ďalší výpočet bude 5·6 = 30 lajkov. 30/12 = 2,5 lajku. Ďalší **najobľúbenejší K (v očiach zvyšných 5 R) má aspoň 3 lajky**. Dáme nabok. Nakoniec nám ostávajú 2 R a 11 K. Títo dvaja R udelili 2·6 = 12 lajkov, a preto **aspoň jeden (najobľúbenejší) K musí mať aspoň 2 lajky** – to znamená od oboch zvyšných robotníkov. Toho vyberieme a máme istotu, že sme vyhoveli všetkým robotníkom!

Spomenul som však, že tento doterajší postup mal jednu logickú nepresnosť, ktorú ešte musíme ošetriť. Keď sme totiž vybrali prvého K, tak sme vraveli, že mal **aspoň** 12 lajkov, a ešte sme to slovo **aspoň** aj podčiarkli a dali tučné. Vzápätí sme však predpokladali, že „dáme nabok“ **presne** 12 R a že nám ostane **presne** 18 R, ktorým sme nevyhoveli. Čo s tým? Zamyslime sa: Čo keby ten celkom prvý vybratý K mal viac ako 12 lajkov? No už po prvom výbere by sme mali viac robotníkov, ktorým sme vyhoveli - to je predsa skvelé! Pokračovali by sme s tým, že ešte stále môžeme vybrať rovnaký počet K (ešte štyroch), ale stačí vyhovieť menšiemu počtu R, takže to musí byť už iba jednoduchšie. Táto úvaha sa dá aplikovať na všetky ďalšie výbery. Takto sme vlastne vždy predpokladali ten najhorší možný prípad, a preto naše riešenie bude platiť aj pre všetky ostatné možnosti.

Bodovanie:

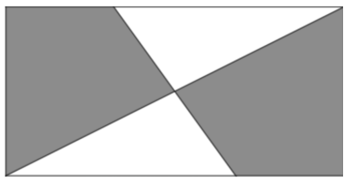
správne riešenie, kde vieme vyhovieť postupne 12+8+5+3+2 robotníkom, aj so zdôvodnením, prečo je toto najhoršia možnosť – 5b.; správne riešenie, ale bez tohto zdôvodnenia – 4 až 4,5b.; nedotiahnuté riešenia, ale obsahujúce nejaké zmysluplné zovšeobecnenia – 2 až 3b.; nesprávne riešenia, ale so zmysluplnými menšími úvahami (napríklad o rovnomernom rozdelení 180/15=12 lajkov) – 0,5 až 1,5b.

Úloha S5: Koláč – *Opravoval Jakub Hluško*



Trénerova manželka upiekla tentokrát obdĺžnikový koláč pomazaný na vrchnej strane lekvárom. Ale urobila chybu – nechala ho ležať len tak na stole, kým odbehla po šľahačku. Tam ho našiel asistent. Asistent z koláča nenápadne vykrojil malú obdĺžnikovú časť, ako na obrázku, zjedol ju a puf – bol preč. Zvyšok koláča si však teraz chcú jedným *priamym* rezom rozdeliť Tréner s manželkou tak, aby mali obidvaja rovnako veľa koláča aj lekváru. Rez môže prechádzať cez vykrojenú časť. **Ako majú koláč rozkrojiť?** Poznámka: Úlohu rieš pre ľubovoľnú možnú veľkosť a polohu vykrojenej obdĺžnikovej časti, čiže vymysli všeobecný postup, ako zostrojiť potrebný rez.

Keď si skúsime koláč, zatiaľ bez diery, rozdeliť na dve rovnako veľké časti, môžeme to urobiť niekoľkými spôsobmi, napríklad rezaním pozdĺž uhlopriečky, alebo rezaním tak, že rezom spojíme stredy protiľahlých strán. Čo by nám mohlo napomôcť je zistenie, že všetky takéto rezy sa pretnú v jednom bode, v priesečníku jeho uhlopriečok.



Ak sa pozrieme i na iné priamky vedené týmto bodom, bude sa nám zdať, že tiež delia koláč, stále bez diery, na dve rovnaké časti. No bude to skutočne tak? Môžeme sa pozrieť na trojuholníky koláča medzi touto čiarou a uhlopriečkou, na obrázku bielou farbou. Vďaka tomu, že priesečník uhlopriečok je stredom symetrie obdĺžnika, každá úsečka, ktorá ním prechádza je priesečníkom rozdelená na dve rovnaké časti. Vďaka vete SUS o zhodnosti trojuholníkov budú teda biele trojuholníky zhodné. Náš rez oproti rezu naznačenou uhlopriečkou akoby odkrojí od každej vyfarbenej časti biely trojuholník, ale zároveň pridá rovnaký trojuholník. Vyfarbená časť sa pritom v ani jednej polovici koláča nemení, teda obsah musí byť rovnaký, ako keby sme rezali uhlopriečkou. Teda aj náš nový rez musí deliť koláč na dve polovice.

Keby sme rozdelili na dve polovice pôvodný koláč, no súčasne i dieru tým istým rezom, obe časti koláča budú rovnako veľké. Práve toto bude náš spôsob delenia koláča. Potrebujeme nájsť priamku, ktorá delí na dve rovnaké polovice ako koláč, tak i dieru. To však nebude nijak náročné, pretože vieme, že koláč na polovicu delia všetky priamky prechádzajúce jeho priesečníkom uhlopriečok, dieru zas všetky priamky prechádzajúce jej priesečníkom uhlopriečok. My potrebujeme nájsť priamku takú, ktorá prechádza oboma týmito bodmi. Rezom teda stačí spojiť priesečníky uhlopriečok koláča i diery a tak získať dve časti s rovnakým obsahom.

Samozrejme, nepôjde ani zďaleka o jediný spôsob ako koláč rozdeliť. Keď sa zamyslíte, iste prídete na to, že musí existovať napríklad rez kolmý na jednu či druhú z jeho strán, deliaci ho na dve časti s rovnakým obsahom. No rez, ktorý sme si zvolili (rozpolenie koláča i diery) je najjednoduchší a na jeho uskutočnenie nie je treba nič merať ani počítať.

Bodovanie:
za vysvetlenie, ktoré priamky delia obdĺžnik na dve rovnaké časti a prečo – 1b.; za správne riešenie – 3b.; za jeho dobré odôvodnenie – 1b.; Nesprávne riešenia využívajúce merania a výpočty obsahov som hodnotil najviac dvoma bodmi.