Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

37. ročník www.pikomat.sk školský rok 2019/2020

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti

Úloha 1: Očíslované fľaše – *Opravovali Martin „Panda" Svetlík, Martin Kliment a Samuel Vaško*

Na kope ležali fľaše očíslované 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Potok náhodne (teda bez toho, aby sa pozeral) odobral z kopy jednu až šesť fliaš. Kvapka si chcela so zvyšných fliaš vybrať také, ktorých súčet by bol deliteľný siedmimi. **Koľko *najviac* fliaš mohol na začiatku Potok *náhodne* odobrať z kopy, aby sa to Kvapke *určite* podarilo?** Napríklad ak by Potok odobral 5 fliaš, mohli by na kope zostať fľaše číslo 2 a 5, čo by bolo deliteľné siedmimi. Avšak mohli by na kope zostať fľaše 2 a 6, z ktorých sa nedá vybrať skupina so súčtom deliteľným siedmimi. Takže odoberať 5 fliaš náhodne Potok nemohol.

Fliaš je 7 a našim cieľom je dodržať 2 podmienky zadania:

1. Potok chce zobrať čo najviac fliaš zo siedmich možných.
2. Kvapke sa z ostatných fliaš (nie nutne všetkých) musí podariť vybrať také, že súčet čísel napísaných na nich bude násobkom 7, teda deliteľné 7 bezo zvyšku.

Rozdeľme si fľaše do 4 skupín. V prvej skupine bude fľaša s číslom 7. V druhej skupine to budú fľaše s číslami 1 a 6. Tretiu skupinu tvoria fľaše s číslami 2 a 5 a štvrtú fľaše s číslami 3 a 4. Môžeme si všimnúť, že súčet čísel v každej z týchto skupín je rovný 7, teda je aj deliteľný siedmimi.

Zaoberajme sa jednotlivými prípadmi, kedy Potok zoberie postupne jednu, dve, tri, ..., šesť fliaš.

<u>Ak Potok zoberie len **1 fľašu**</u>, tá musí patriť do **jednej** zo skupín. Dokáže tak „porušiť" iba jednu z našich štyroch skupín. Preto Kvapka vtedy vždy dokáže vybrať všetky fľaše z niektorej inej skupiny a tak splní podmienky zadania. Napríklad ak Potok zoberie fľašu s číslom 4 (zo štvrtej skupiny), Kvapka má viac možností ako vybrať fľaše so súčtom deliteľným siedmimi → zoberie fľaše 2 a 5 (z tretej skupiny) alebo 6 a 1 (z druhej skupiny), alebo fľašu s číslom 7 (z prvej skupiny).

<u>Ak Potok zoberie **2 fľaše**</u>, tieto fľaše mohli patriť **najviac dvom** rôznym skupinám. Potok tak vie narušiť najviac dve zo štyroch skupín. Teda určite nám zostanú aspoň dve ďalšie skupiny s fľašami, ktorých súčet čísel je 7. Napríklad, ak Potok zoberie fľaše s číslami 5 a 6, Kvapka si môže stále zobrať fľašu s číslom 7 alebo nepoškodenú dvojicu 3 a 4.

<u>Ak Potok zoberie **3 fľaše**</u>; tu vie potok narušiť **najviac tri** zo štyroch skupín. Teda určite nám zostane jedna skupina fliaš, ktorej súčet čísel je 7. Ak napríklad Potok zoberie fľaše s číslami

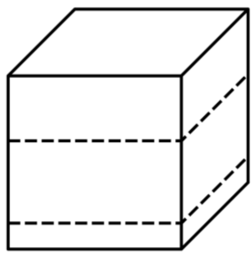
3, 5 a 7, tak štvrtá skupina s fľašami s číslami 3 a 4 bude narušená, taktiež aj tretia skupina (2 a 5) aj prvá skupina (7). Kvapke ale zostávajú 4 fľaše a to 1, 2, 4 a 6. Vidíme, že „prežila“ jedna zo skupín a to druhá skupina s fľašami č. 1 a 6. Takéto niečo by platilo, nech by Potok zobral ktorékoľvek 3 fľaše.

Ak Potok zoberie **4 fľaše**; tu vie Potok narušiť **všetky štyri skupiny** tak, že zoberie jednu fľašu z každej skupiny. Ak napríklad Potok zoberie fľaše s číslami 4, 5, 6 a 7, všetky 4 skupiny boli narušené. Kvapka už nemá dvojicu na ktorú by sa mohla spoľahnúť. Jediné čo ju môže zachrániť je, ak by sa medzi zvyšnými fľašami nachádzala nejaká kombinácia so súčtom deliteľným siedmimi. Zostali nám fľaše s číslami 1, 2 a 3. Spravme teda všetky možné súčty fliaš čo Potok nezobral: 1+2+3=6 | 1+2=3 | 1+3=4 | 2+3=5. Problémom však je, že ani jeden výsledok nie je deliteľný 7 bezo zvyšku, takže existuje možnosť, že sa Kvapke nepodarí splniť podmienky zadania. Teda Kvapka **nevie s istotou splniť podmienky**.

Ak Potok zoberie **5 alebo 6 fliaš** – ak by Potok zobral medzi fľašami napr. tie 4, ktoré sme uvažovali v predošlej možnosti, tak už vieme, že sa to Kvapke nepodarí aj tak. Potok len ešte vezme nejaké fľaše navyše. Takže ani tu Kvapka **nevie s istotou splniť podmienky zadania**.

Bodovanie:
za správny výsledok – 1b.; za nájdenie skupín fliaš so súčtom čísel 7 – 2,5b.; za ukázanie, že najväčší počet fliaš, ktoré mohol Potok zobrať je 3 a väčší počet odobrať nemôže – 1,5b.

Úloha 2: Rezanie kocky – *Opravovali Fedor Župník a Juraj Jankovich*



Potok a Kvapky upratali odpad do dvoch rovnakých krabíc. Každá krabica mala tvar kocky. Aby sa krabice nerozpadli, chceli ich Potok a kvapky ešte obaliť látkou: Potok obaľoval jednu krabicu, kvapky obaľovali druhú krabicu. Potok rýchlo obalil svoju krabicu zo všetkých strán látkou. Kvapky však nedočiahli na vrch svojej krabice, a tak ju rozrezali vodorovnými rezmi na niekoľko kvádrových krabičiek, podobne ako na obrázku. Následne kvapky obalili všetky vzniknuté krabičky zo všetkých strán (aj hornej a spodnej) látkou. Na konci kvapky zistili, že spotrebovali presne trikrát viac látky ako Potok. Koľkými rezmi museli kvapky rozdeliť svoju kocku? Poznámka: Látky je neobmedzené množstvo, môže sa rezať a pri obaľovaní krabíc sa nikde neprekrýva

Kocka s hranou dĺžky a má povrch $6a^2$ alebo $6\cdot a\cdot a$. Takáto kocka má 6 štvorcových stien, pričom povrch každej z nich je $a\cdot a$, alebo a^2. Ak takúto kocku vodorovne prerežeme, ku jej povrchu, šiestim štvorcom, pribudnú ešte dva štvorce, rovnako veľké ako steny našej kocky, jeden na každej strane rezu. Tieto dva kusy rozrezanej kocky, dva kvádre, budú teda po jednom rozrezaní mať povrch $6a^2+2a^2$, teda $8a^2$. Druhý vodorovný rez musí prerezať jednu z týchto častí, odhaľujúc ďalšie dva štvorce, čiže po druhom rozrezaní kocky budú mať časti dokopy $8a^2+2a^2$, teda $10a^2$. Vidíme teda, že každý rez kocky pridá k jej povrchu ekvivalent dvoch ďalších stien. Ak teda chceme dostať povrch, ktorý je trikrát väčší, ako pôvodný, potrebujeme mať diely s celkovým povrchom $18a^2$, čo je $6a^2\cdot 3$. Po jednom reze kocky je teda povrch dielov rovný $8a^2$, po dvoch $10a^2$, po troch $12a^2$, po štyroch $14a^2$, po piatich

$16a^2$ a po šiestich $18a^2$. Na dosiahnutie trikrát väčšieho povrchu kocky je teda potrebných 6 rezov.

Bodovanie:
za určenie povrchu kocky – 1b.; za určenie povrchu častí po reze jednom – 2,5b.; za určenie počtu rezov – 1,5b.

Úloha 3: Stĺp z tehál – *Opravovali Ľudmila Šimková, Monika Machalová, Kristína Prešinská a Peter „Bubu" Onduš*

Na stavenisku ležalo niekoľko tehál s rozmermi 2×4×7 dm. Niekto zobral všetky tehly a naukladal ich na seba – na spodok položil jednu z tehál a každú ďalšiu tehlu položil niektorou stenou na vrch vznikajúceho stĺpu. Každá tehla pritom mohla byť položená ľubovoľnou stenou nadol. **Koľko *rôznych* výšok mohol mať takýto stĺp, ak:**

- **Kategórie 5 6 P: Na stavenisku ležalo 15 tehál?**
- **Kategórie 7 8 S T: Na stavenisku ležalo 47 tehál?**
- **Kategórie 9 K: Na stavenisku ležalo N tehál, kde N > 20?**

Zamyslime sa najprv, akou časťou môže prispievať jedna tehla do celkovej výšky stĺpu. Ľahko nahliadneme, že tehlu vieme postaviť tak, aby mala 2 dm do výšky, 4 dm do výšky alebo 7 dm do výšky. Výšku celého stĺpu potom jednoducho vypočítame ako súčet výšok jednotlivých tehál.

Riešenie pre 15 tehál:
Ak položíme všetky tehly tak, aby ich výška bola 2 dm, postavíme tak najnižší možný stĺp. Jeho výška bude 15·2=30 dm. Najvyšší možný stĺp zas vieme postaviť tak, že všetky tehly položíme na výšku 7 dm. Výška najvyššieho stĺpu, ktorý vieme postaviť je 15·7=105 dm. Ostatné stĺpy, ktoré vieme postaviť majú teda určite výšku v rozmedzí 30 – 105 dm. Ostáva nám už len zistiť, ktoré výšky stĺpov v tomto rozmedzí vieme dosiahnuť.

Zoberme si najprv stĺp, ktorý má výšku **30 dm**, čiže všetky tehly v ňom majú výšku 2 dm. Postupne tieto tehly začneme „pretáčať" na výšku 4 dm, čím daný stĺp zvýšime vždy postupne o 2 dm – pretože ak pretočíme tehlu z výšky 2 dm na 4 dm, celkovo sa výška stĺpu zvýši o 2 dm. Postupne tak získame stĺpy s výškami: **32 dm**, **34 dm**, **36 dm**, ..., **56 dm**, **58 dm**, **60 dm** (tu už majú všetky tehly výšku 4 dm).

Teraz zoberme stĺp, ktorý má jednu tehlu výšky 7 dm a zvyšných štrnásť tehiel má výšku 2 dm. Výška tohto stĺpu je teda 7+14·2= **35 dm**. Znova budeme postupne pretáčať tehly z výšky 2 dm na výšku 4 dm. Tehlu, ktorá má výšku 7 dm pretáčať nebudeme. Postupne teda získame stĺpy s výškami: **37** dm, **39** dm, ..., **59** dm, **61** dm, **63** dm (tu má jedna tehla výšku 7 dm a zvyšných 14 tehál má výšku 4 dm).

Všimnime si, že takto sa nám už podarilo dosiahnuť všetky možné výšky stĺpu v rozmedzí 30-60 dm, okrem stĺpov s výškou ***31 dm*** a ***33 dm***. Tie sa nám v skutočnosti už ani nepodarí postaviť. Z najnižšieho stĺpu s výškou 30 dm sa totiž nevieme dostať na 31 dm, alebo 33 dm, pretože otočením jednej tehly sa zvýši výška stĺpu o 2 dm, alebo až o 5 dm – ak pretočíme tehlu s výškou 2 dm na tehlu s výškou 7 dm.

Zoberme si teraz najvyšší možný stĺp, teda s výškou **105 dm** (všetky tehly majú výšku 7 dm). Postupne budeme pretáčať tieto tehly na výšku 4 dm, čím danú vežu znížime vždy o 3 dm.

Dostaneme tak stĺpy s výškami: **102 dm**, **99 dm**, ..., **66 dm**, **63 dm**, **60 dm** (tu majú všetky tehly výšku 4 dm).

Teraz zoberme stĺp, ktorý má jednu tehlu s výškou 2 dm a zvyšných štrnásť má výšku 7 dm. Výška tohto stĺpu je potom 2+14·7=**100 dm**. Znova budeme postupne pretáčať tehly s výškou 7 dm, na výšku 4 dm, čím postupne dostaneme stĺpy s výškami: **97 dm**, **94 dm**, ..., **64 dm**, **61 dm**, **58 dm** (jedna tehla má výšku 2 dm, zvyšné majú výšku 4 dm).

Nakoniec zoberme stĺp, ktorý má dve tehly s výškou 2 dm a zvyšných trinásť s výškou 7 dm. Jeho výška je 2·2+13·7=**95 dm**. Znova budeme pretáčať tehly zo 7 dm na 4 dm a dostaneme tak stĺpy s výškami: **92 dm**, **89 dm**, ... **62 dm**, **59 dm**, **56 dm** (dve tehly majú výšku 2 dm, zvyšné majú výšku 4 dm).

Teraz sa nám zas podarilo dosiahnuť všetky možné výšky stĺpu v rozmedzí 60 – 105 dm, okrem stĺpov s výškami ***104 dm, 103 dm, 101 dm*** a ***98 dm***. Vidíme, že keď máme stĺp s výškou 105 dm, vieme ho znížiť minimálne o 3 dm, takže stĺpy s výškami 104 dm a 103 dm sa nám určite postaviť nepodarí. Premyslite si, že ani stĺpy s výškami 101 dm a 98 dm nevieme postaviť, pretože 105 dm stĺp vieme znižovať vždy postupne o 3 dm, alebo až o 5 dm.

V rozmedzí 30 – 105 dm máme 76 možných výšok. Z týchto 76 je 6 výšok takých, ktoré nevieme dosiahnuť. Stĺp preto mohol mať 76-6=**70** rôznych výšok.

<u>Riešenie pre 47 tehál:</u>
Riešenie je veľmi podobné riešeniu pre 15 tehál, preto si dovolíme ho trochu zostručniť. Najnižší možný stĺp má 47·2=94 dm, najvyšší stĺp má 47·7=329 dm.

Zo stĺpu s výškou **94 dm** vieme postupne pretáčaním tehál z 2 dm na 4 dm dostať stĺpy s výškami: **96 dm**, **98 dm**, ... **184 dm**, **186 dm**, **188 dm**. Podobne zo stĺpu s výškou **99 dm** (jedna tehla má výšku 7 dm, zvyšných štyridsaťšesť tehál výšku 2 dm) vieme rovnakým spôsobom postupne vytvoriť stĺpy s výškami: **101 dm**, **103 dm**, ..., **187 dm**, **189 dm**, **191 dm**. Dokopy teda vieme vytvoriť všetky možné výšky stĺpu v rozmedzí 94 – 189 dm, okrem výšok ***95 dm*** a ***97 dm***. Premyslite si, že stĺpy s výškami 95 dm a 97 dm naozaj postaviť nevieme pre dôvody podobné, ako pri výškach 31 dm a 33 dm v predošlom riešení.

Zo stĺpu s najvyššou možnou výškou **329 dm** vieme postupne pretáčaním tehál z výšky 7 dm na 4 dm dostať stĺpy s výškami: **326 dm**, **323 dm**, ..., **194 dm**, **191 dm**, **188 dm**. Podobne zo stĺpu s výškou **324 dm** (jedna tehla má výšku 2 dm, zvyšných štyridsaťšesť má výšku 7 dm) vieme postupne pretáčaním tehál z výšky 7 dm na 4 dm vytvoriť stĺpy s výškami: **321 dm**, **318 dm**, ..., **192 dm**, **189 dm**, **186 dm**. A nakoniec zo stĺpu s výškou **319 dm** (dve tehly majú výšku 2 dm a zvyšných štyridsaťpäť tehál má výšku 7 dm) vieme postupne dostať stĺpy s výškami: **316 dm**, **313 dm**, ..., **190 dm**, **187 dm**, **184 dm**.

Takto sa nám podarilo získať všetky možné výšky stĺpu v rozmedzí 189 – 329 dm, okrem stĺpov s výškami ***328 dm***, ***327 dm, 325 dm*** a ***322 dm***. Premyslite si, že stĺpy s ***vyznačenými*** výškami sa nám naozaj nepodarí postaviť. V rozmedzí 94-329 dm máme 236 rôznych výšok, z toho 6 je takých, ktoré nevieme postaviť. Stĺp preto mohol mať 236-6=**230** rôznych výšok

<u>Riešenie pre n tehál:</u>

Opäť použijeme rovnaké úvahy ako v riešení pre 15 tehál, akurát ich zovšeobecníme. Najnižší možný stĺp má výšku 2n a najvyšší možný stĺp má výšku 7n (počet tehál násobíme výškou tehly). Vezmime stĺp výšky 2n (všetky tehly majú výšku 2 dm). Postupným pretáčaním tehál z výšky 2 dm na 4 dm dostaneme stĺpy: 2n, 2n+2, 2n+4, ..., 4n-4, 4n-2, 4n. Teraz vezmime stĺp s výškou 2n+5 (n-1 tehál má výšku 2 dm, a 1 tehla má výšku 7 dm). Postupným pretáčaním tehál z výšky 2 dm na 4 dm dostaneme stĺpy s výškami: 2n+5, 2n+7, 2n+9, ... 4n-1, 4n+1, 4n+3 = 4·(n-1)+7 (n-1 tehál má výšku 4 dm a jedna tehla má výšku 7 dm). Keď to teraz dáme dokopy, zistíme, že vieme v rozmedzí 2n – 4n postaviť stĺp s ľubovoľnou výškou, okrem výšok **2n+1** a **2n+3.**

Zo stĺpu s výškou 7n vieme postupne vytvoriť pretáčaním tehál s výškou 7 dm na 4 dm stĺpy s výškami: 7n, 7n-3, 7n-6, ..., 4n+6, 4n+3, 4n (tu už majú všetky tehly výšku 4 dm)

Zo stĺpu s výškou 7n-5 (n-1 tehál má výšku 7 dm a 1 tehla má výšku 2 dm) vieme vytvoriť pretáčaním tehál s výškou 7 dm na 4 dm stĺpy s výškami: 7n-5, 7n-8, 7n-11, ... 4n+4, 4n+1, 4n-2=4(n-1)+2.

Zo stĺpu s výškou 7n-10 (n-2 tehál má výšku 7 dm a 2 tehly majú výšku 2 dm) vieme vytvoriť pretáčaním tehál s výškou 7 dm na 4 dm stĺpy s výškami: 7n-10, 7n-13, 7n-16, ... 4n+2, 4n-1, 4n-4= 4(n-2)+2·2. Všimnite si, že v rozmedzí výšok 4n – 7n sme dostali postupne všetky možné výšky stĺpu, okrem **7n-1**, **7n-2**, **7n-4** a **7n-7.** Premyslite si ešte, že stĺpy s **vyznačenými** výškami naozaj nevieme postaviť.

V rozmedzí 2n – 7n máme 5n+1 rôznych výšok. Z nich je znova 6 takých, ktoré nevieme vystavať. Celkovo teda mohol stĺp mať: (5n+1)-6= **5n-5** rôznych výšok.

<u>Bodovanie</u>:

za správny výsledok – 0,5b.; za nájdenie rozpätia výšok stĺpu – 0,5b.; za nájdenie výšok stĺpov, ktoré nevieme postaviť – 1b.; za dôkaz, že všetky ostatné výšky postaviť vieme – 3b.

<u>Poznámka</u>:

Niektorí ste veľmi pekne odvodili počet rôznych natočení tehál, no žiaľ ste odpovedali na inú otázku, ako bola v zadaní a preto ste zaň nedostali body. Treba si uvedomiť, že aj dve rôzne otočenia tehál môžu vytvoriť rovnako vysokú vežu. Napr. pre päť tehál: 2+2+2+7+7=4+4+4+4+4. A takýchto "rovnako vysokých" otočení je oveľa viac.

Úloha 4: Futbalový turnaj – *Opravovali Michaela Zatrochová, Karolína Pisoňová a Michaela Rusnáková*

Vo futbalovom turnaji boli štyri tímy – Hasiči, Policajti, Záchranári a Autobusári. Na konci futbalového turnaja, keď už každý tím odohral s každým iným tímom práve jeden zápas, boli výsledky nasledovné:

Tím	Výhry	Remízy	Prehry	Skóre
Hasiči	2	1	0	6:2
Policajti	1	1	1	1:2
Záchranári	0	2	1	2:3
Autobusári	0	2	1	0:2

Skóre je celkový počet gólov, ktoré daný tím strelil a dostal (zapísané *strelil*:*dostal*) za celý turnaj. **Urči výsledky všetkých zápasov, vrátane skóre v každom zápase.**

Začnime tímom, ktorému vieme jednoznačne určiť skóre zápasov. Autobusári nedali ani jeden gól a mali dve remízy. To znamená, že obe ich remízy skončili so skóre 0:0. Počas turnaja dostali dva góly, a teda ich tretí zápas musel skončiť so skóre 0:2. Jediný tím, ktorý dal počas turnaja aspoň dva góly a aspoň raz vyhral, boli hasiči. Preto autobusári prehrali so skóre 0:2 práve s hasičmi. Dve remízy autobusárov so skóre 0:0 boli teda s policajtmi a záchranármi.

Policajti dali v celom turnaji iba jeden gól a raz vyhrali. To znamená, že ich výhra musela byť so skóre 1:0. Už vieme, že s autobusármi remízovali 0:0, a teda zvyšné dva góly, ktoré na turnaji dostali, museli padnúť v ich treťom zápase, prehre. Hasiči ani raz neprehrali, takže s policajtmi museli vyhrať zápas so skóre 2:0. Z toho vyplýva, že policajti vyhrali 1:0 nad záchranármi.

Posledný zápas, ktorého výsledok ešte nepoznáme, je zápas medzi hasičmi a záchranármi. Hasiči majú na celom turnaji dve výhry a jednu remízu. Zatiaľ vieme, že vyhrali nad policajtmi aj autobusármi 2:0. A keďže na celom turnaji mali dve výhry, jednu remízu a skončili s celkový skóre 6:2, je jasné, že so záchranármi remízovali 2:2.

	Hasiči	**Policajti**	**Záchranári**	**Autobusári**
Hasiči	x	2:0	2:2	2:0
Policajti	0:2	x	1:0	0:0
Záchranári	2:2	0:1	x	0:0
Autobusári	0:2	0:0	0:0	x

Bodovanie:

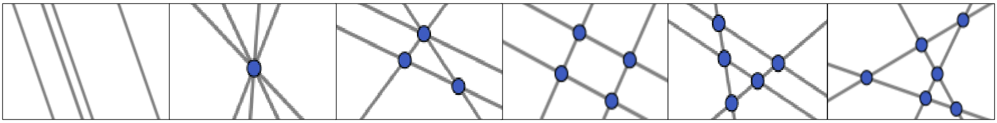
za výsledky všetkých zápasov, vrátane skóre – 2b.; za odôvodnenie výsledku a skóre každého zápasu 6×0,5b.

Úloha 5:Štyri priamky – *Opravoval Jakub Hluško*

Sára si predstavila štyri rôzne priamky v rovine. **V koľkých rôznych bodoch sa mohli tieto štyri priamky pretnúť? Nájdi všetky možné počty priesečníkov týchto priamok**.

Poznámka: Rôznobežné priamky sa pretínajú aj vtedy, ak je ich priesečník mimo obrázka.

Skúšaním rôznych postavení priamok prídeme na to, že priamky vieme usporiadať do pozícií s 0, 1, 3, 4, 5, alebo 6 priesečníkmi, ako to vidno na obrázkoch.



Prečo však nejde zostrojiť viac priesečníkov? Každá dvojica priamok urobí najviac jeden samostatný priesečník. Dvojíc priamok je však práve 6 – ak si priamky nazveme a, b, c, d, sú to dvojice ab, ac, ad, bc, bd, cd. Ak nám každá dvojica vytvorí jeden priesečník, tak priesečníkov bude tiež 6, nie však viac.

A ako je to s dvoma priesečníkmi? Poďme nájsť usporiadanie, ktoré bude mať práve dva priesečníky! Zoberme si na začiatok tri priamky a budeme sa pozerať, ako k nim vieme pridať štvrtú. Ak by sme naše tri priamky umiestnili rovnobežne, štvrtá priamka by mala s prvými troma buď 0 alebo tri priesečníky, podľa toho, či s nim iné alebo nie je rovnobežná. Teda troma rovnobežnými priamkami naše riešenie nezačína. Ak naše tri priamky usporiadame do postavenia s jediným spoločným priesečníkom, je jasné, že štvrtá priamka by pretínala dve alebo tri z nich, podľa toho, či by bola rovnobežná s niektorou z troch pôvodných, a teda by sme mali spolu 3 alebo 4 priesečníky. Umiestnenie prvej trojice priamok tak, že budú všetky vzájomne rôznobežné nám okamžite vyrobí tri priesečníky. Preto nám nezostáva nič iné, ako umiestniť počiatočné tri priamky nasledovne – dve rovnobežne a k nim rôznobežne tretiu. Teraz máme dva priesečníky, no nie je možné umiestniť štvrtú priamku tak, aby nám nevytvorila ani jeden nový priesečník.

Čo sme to vlastne dokázali? Hľadali sme postavenie 4 priamok s dvoma priesečníkmi. Povedali sme si, že ho nájdeme tak, že najskôr umiestnime tri priamky a potom k nim pridáme štvrtú. Pozreli sme sa na každé možné usporiadanie troch priamok v rovine. Pre každé samostatne sme ukázali, že usporiadanie štyroch priamok s dvoma priesečníkmi začínajúce takto položenými troma neexistuje. Ak by však existovalo akékoľvek usporiadanie štyroch priamok s dvoma priesečníkmi, muselo by sa dať takto popísať, preto usporiadanie s dvoma priesečníkmi neexistuje.

Bodovanie:
za nájdenie všetkých počtov priesečníkov – 2b.; za dôkaz, že neexistuje usporiadanie s dvoma priesečníkmi – 1,5b.; za dôkaz, že neexistuje usporiadanie s viac ako šiestimi priesečníkmi – 1,5b.

Úloha 6: Kameň-papier-nožnice – *Opravoval Martin „Panda" Svetlík*

Ľudia ulovili tri kapry a tri šťuky. Ryby prosili, aby ich vrátili späť do vody. Tak im ľudia povedali, že ich pustia, ak vyhrajú tímové kameň-papier-nožnice. Tie sa hrajú takto:

Tím troch kaprov hrá proti tímu troch šťúk. Všetkých šesť rýb ukáže svoj vybraný ťah, teda kameň (K), papier (P) alebo nožnice (N). Až spätne potom najstarší kapor rozhodne, ktorý kapor hral proti ktorej šťuke. V týchto pároch vyhodnotia svoje vybrané ťahy. Napríklad ak kapry zahrali K, K, P a šťuky P, P, N, tak ich kapor mohol popárovať napríklad K-N, K-P, P-P, a teda kolo skončilo ako remíza.

Takto si zahrajú niekoľko kôl. Ak bude mať na konci niektorý tím viac vyhratých kôl ako druhý tím, víťazný tím ľudia pustia späť do vody. V prípade rovnakého počtu vyhratých kôl ľudia pustia oba tímy.

Bohužiaľ, kapry a šťuky nevedia, koľko bude kôl. A čo je ešte horšie, nehovoria žiadnou spoločnou rečou, takže sa nemôžu dohodnúť na stratégii. **Vedia sa kapry zachrániť? Ako majú hrať? Vedia sa šťuky zachrániť? Ako majú hrať, ak sa nemôžu spoliehať na pomoc kaprov (naopak, vedia len to, že kapry budú hrať určite tak, aby s istotou neprehrali)?**

Ako prvé si treba uvedomiť, že ryby nevedia, koľko bude kôl. To znamená, že po každom kole na tom chcú byť tak, že práve dokopy neprehrávajú. Ba dokonca už v prvom kole chcú neprehrať, lebo čo ak bude len jedno kolo? Potrebujeme teda nájsť stratégiu, ktorá nám v každom jednom kole zabezpečí neprehru (výhru alebo remízu). Toto ste zvládli dobre – naozaj ste väčšinou hľadali stratégiu, ako neprehrať žiadne jedno kolo.

Pre kapre potrebujeme nájsť všetky stratégie, ktorými vedia neprehrať, nech by šťuky hrali čokoľvek. Prečo nám nestačí nájsť len jednu, ale musíme všetky? Preto, aby sme potom z pohľadu šťúk vedeli povedať, ako hrať proti týmto stratégiám, aby ani šťuky neprehrali. Ak by totiž kapre mali viac ako jednu neprehrávajúcu stratégiu, museli by sme nájsť pre šťuky takú, ktorá je dobrá proti všetkým týmto stratégiám.

Čo teda môžu kapre hrať? Mohli by zahrať všetky tri rovnaký symbol. Napríklad tri kamene. Je jasné, že toto nie je dobré, lebo ak by šťuky zahrali aspoň dva papiere, tak nech by starý kapor robil čokoľvek, stále by sa aspoň dva kaprie kamene dostali do páru so šťučími papiermi, a kapre by prehrali.

Podobne zistíme, že nie je dobré ani hrať dva rovnaké symboly a tretí iný. Ak by napríklad kapre hrali 2 kamene a 1 niečo iné, mohlo by sa stať, že šťuky by zahrali 3 papiere, a nech by ich popároval akokoľvek, tak zase by sa dva kaprie kamene dostali do páru so šťučími papiermi a kapre by prehrali.

Ostáva teda preskúmať možnosť **hrať tri rôzne symboly**. Pozrime sa, či sa to dá napárovať so všetkým, čo šťuky môžu zahrať.

Ak by šťuky zahrali tiež tri rôzne symboly, kapor to spáruje ľahko, napr. K-K, P-P, N-N a je remíza, alebo dokonca K-N, P-K, N-P (v poradí kapor-šťuka), a môžu aj vyhrať 3:0.

Ak by šťuky zahrali tri rovnaké symboly, tak ich kapor spáruje ľubovoľne a vždy to dopadne rovnako – jeden vyhrá, jeden prehrá a jeden remizuje, čiže dokopy to bude vždy remíza (napr. 3 kamene: K-K remíza, P-K výhra, N-K prehra).

Ak by šťuky hrali 2 rovnaké a jeden iný, tak by sme si mohli tie kombinácie vypísať a popárovať, alebo si pomôžeme takouto úvahou: Keďže šťuky hrajú dva rôzne symboly, tak na ich porazenie treba, aby kapre zahrali aspoň dva rôzne symboly. Keďže kapre majú všetky 3 symboly, tak určite dva šťučie symboly porazia, a teda dopadne to aspoň 2:1 v prospech kaprov podľa toho, čo by tretí symbol remízoval alebo prehral. Dve výhry však majú isté.

Zatiaľ sme teda zistili, že **kapre sa dokážu určite zachrániť** (neprehrať), ak budú **hrať stále kombináciu K-P-N, a to je ich jediná možná stratégia**.

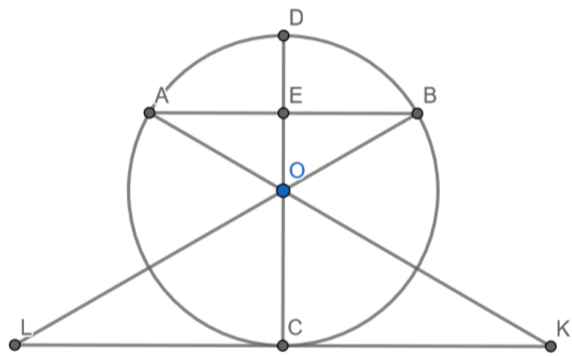
A čo šťuky? To už je ľahké – z už opísaných úvah vidíme, že keby šťuky hrali 3 rôzne symboly, alebo 2 a 1, tak by kapre vyhrali. Jedine **ak budú šťuky hrať v každom kole 3 rovnaké symboly, tak sa tiež zachránia**, lebo každé kolo dopadne remízou.

Bodovanie:
za správnu odpoveď – každá zo stratégií (K-P-N pre kapre a 3 rovnaké symboly pre šťuky) – 2×1b.; za odôvodnenie, prečo musia hrať kapre K-P-N (a prečo je to ich jediná možná stratégia) – 2b.; za odôvodnenie, prečo musia hrať šťuky 3 rovnaké – 1b.

Úloha 7: Úsečky v kružnici – *Opravovala Timea Szöllősová*

Na kružnici *k* so stredom v bode *O* boli nakreslené body *A* a *B* tak, že úsečka *AB* neprechádzala bodom O. Na kružnici *k* boli tiež nakreslené body *C* a *D* tak, že $|AC| = |BC|$ a $|AD| = |BD|$, pričom úsečka *AC* bola dlhšia než úsečka *AD*. V bode *C* bola nakreslená dotyčnica ku kružnici *k*, ktorá pretínala priamky *AO* a *BO* postupne v bodoch *K* a *L*. Kvapky si ešte zapamätali, že $|KL| = 2 \times |AB|$. Aká bola veľkosť uhla *AOB*?

Ako prvé si načrtnime čo sa nám vlastne snaží zadanie povedať. V náčrte si môžeme rovno označiť aj bod E, ktorý je priesečníkom úsečiek AB a CD.



Teraz sa pozrime na úsečku CD. Trojuholníky ABC a ABD sú rovnoramenné so základňou AB - to nám hovorí zadanie tým, že nám udáva rovnosť ramien v každom z týchto trojuholníkov. Vieme, že C aj D ležia na osi úsečky AB, pretože sú rovnako vzdialené od jej krajných bodov. To znamená, že **úsečka CD** spájajúca tieto dva body **je osou AB**, keďže úsečka je jednoznačne daná dvoma bodmi. Vieme o nej dokonca aj to, že prechádza bodom O, pretože os každej tetivy prechádza stredom kružnice. To znamená, že úsečka CD je priemerom kružnice k.

O dotyčniciach kružnice vieme, že sú kolmé na priemer. To znamená, že **úsečka KL je kolmá na úsečku CD**. A keďže CD je kolmá aj na AB (keďže je osou AB), tak **úsečky KL a AB sú rovnobežné**.

Úsečky AK a BL preto vytvárajú striedavé uhly pri úsečkách AB a KL. Zároveň sú uhly AOB a KOL vrcholové a teda sú zhodné. Vznikli nám tu teda **dva podobné trojuholníky – trojuholník ABO a trojuholník KLO**. O týchto trojuholníkoch vieme, že ich koeficient podobnosti je 2, pretože podľa zadania |KL|=2·|AB|.

Z podobnosti týchto trojuholníkov vyplýva, že |OC|=2·|OE|. OC je totiž výškou v trojuholníku KLO a OE je výškou v trojuholníku ABO. Tým pádom **|OE|=|ED|**, pretože |OC|=|OD| sú dĺžky polomerov kružnice k.

Pozrime sa teraz na trojuholníky AEO a AED. Sú zhodné podľa vety SUS, ktorú si môžeme všimnúť pre stranu AE, pravý uhol pri vrchole E a strany OE a ED. Teda **|AD|=|OA|**.

Vieme, že **|OA|=|OD|**, pretože obe úsečky sú polomerom kružnice k. Z toho vidíme, že **trojuholník AOD je rovnostranný** a teda **uhol AOD má veľkosť 60°**. Trojuholník AOB je rovnoramenný, pretože dve jeho strany sú polomermi kružnice k. To znamená, že **úsečka CD je osou uhla pri vrchole O**, pretože v rovnoramenných trojuholníkoch je os základne zároveň osou uhla oproti základni.

Poznáme teda veľkosť polovice uhla AOB – uhol AOD, ktorý má veľkosť 60°. Teda **veľkosť uhla AOB je** dvojnásobok tejto polovice čiže **2·60°=120°**.

Bodovanie:

Z 5 bodov za správne riešenie bolo 0,5 boda za správny výsledok. Rozdelenie zvyšných 4,5 boda sa rôznilo, vzhľadom na to, že takmer každý sa na úlohu pozeral z iného pohľadu. Najčastejšie som body strhávala, ak ste nedokázali, že trojuholník, s ktorým ste sa rozhodli pracovať vo svojom riešení, je naozaj rovnostranný a nie iba rovnoramenný – za to ste mohli stratiť až 2,5 boda, pretože to bola hlavná časť väčšiny postupov.