Vzorové riešenia 3. série letnej časti

Úloha 1: Klamár – *Opravoval Jakub Pravda*

Podľa súdnych spisov sa králik rozhodol, že bude každý aprílový deň buď celý deň klamať, alebo celý deň hovoriť pravdu. Preto sa súd zvolával každý deň od prvého apríla, aby sa zistilo, aký veľký je králik klamár. Prvého apríla králik vyhlásil, že počet aprílových dní, kedy klame, je aspoň 1. Druhého apríla králik vyhlásil, že počet aprílových dní, kedy klame, je aspoň 2. Takto to pokračovalo až dodnes, 30. apríla, keď králik vyhlásil, že počet aprílových dní, kedy klame, je aspoň 30. **Prokurátorovou a Tvojou úlohou je zistiť, koľko dní v apríli dokopy králik naozaj klamal – a aj to riadne dokázať.**

Odprezentujem vám dva podľa mňa najjednoduchšie spôsoby, ako úlohu vyriešiť.

Mnoho z Vás ešte nevie veľmi narábať s rovnicami, a tak ste často začali s peknou úvahou, že 1. apríla musí králik hovoriť pravdu. Ak by totiž klamal, tak jeho výrok "klamem aspoň raz za mesiac" by bol pravdivý (keďže už vieme, že minimálne 1. apríla klame), čo je v spore s tým, že králik celý prvý deň klame. Keďže už vieme, že 1. apríla hovorí pravdu, je potom jasné, že 30. apríla musí králik klamať, keďže už nie je možné, aby 30 dní za mesiac klamal. Z rovnakého dôvodu ako 1. apríla musí králik hovoriť pravdu aj 2. apríla (ak by klamal, výrok "klamem aspoň dvakrát za mesiac" by bol pravdivý, čo je v rozpore s tým, že celý 2. apríl klame, keďže už vieme, že aj 1. apríla klame) a rovnako je potom jasné, že 29. apríla musí klamať, lebo už nie je možné, aby 29 dní v mesiaci klamal. Vidíme teda, že takýmto spôsobom sa nám popárujú dni, v ktorých musí vravieť pravdu a v ktorých musí klamať (1-30, 2-29, 3-28, 4-27, 5-26, 6-25, 7-24, 8-23, 9-22, 10-21, 11-20, 12-19, 13-18, 14-17, 15-16). Z čoho vidíme, že prvých 15 dní hovoril pravdu a posledných 15 dní (od 16. do 30. apríla) klamal. **Teda dokopy králik klamal 15 dní.**

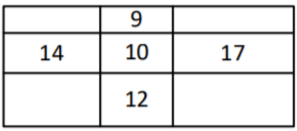
Rovnako sa dala úloha riešiť aj všeobecným vyjadrením si počtu dní, v ktorých hovorí králik pravdu. V prvom rade je fajn si uvedomiť, že ak počet dní v mesiaci, kedy králik klame je n, znamená to, že určite hovorí pravdu v n-tý deň aj všetky dni pred týmto dňom. Prečo? No logicky ak je pravda, že klame aspoň n-krát, určite sú pravdivé aj výroky, že klame aspoň (n-1)-krát, (n-2)-krát atď... čo sú vlastne výroky z dní pred dňom n. No a všetky zvyšné dni, ktoré sú väčšie ako n, klame (hovorí v nich, že klame viackrát ako n-krát za mesiac, čo je klamstvo). Takýchto dní je teda 30-n (mesiac má 30 dní a n-krát v nich hovorí pravdu, teda vo zvyšných dňoch klame). Na začiatku sme si ale stanovili, že počet dní v mesiaci, kedy králik klame je n, tým pádom vidíme, že 30-n=n. K obom stranám rovnice pripočítame n a následne obe strany vydelíme dvomi a dostávame **n=15, čo je správne riešenie**.

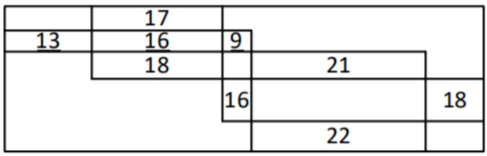
Bodovanie:
za správny výsledok – 3b.; za kompletný postup – 2b.;

Poznámka:
Často som strhával bod za to, ak ste síce správne popísali, ako to musí byť s prvým a posledným dňom, no nijako ste nevysvetlili, že to bude rovnako aj pre ďalšie dni a rovno ste vyhlásili, že 15 sedí. Rovnako som strhával bod alebo pol boda, ak ste sa v riešení opierali o iné tvrdenia, ktoré neboli nijako vysvetlené, prípadne sa nevzťahovali všeobecne na všetky dni, ale len na konkrétny deň, ktorý ste si vy zvolili ako príklad.

Úloha 2: Dvanásť basketbalistov – *Opravoval Samuel Vaško*

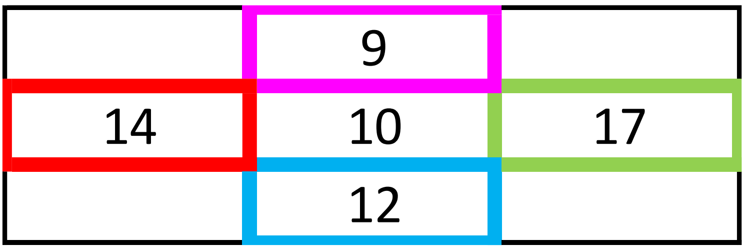
„Chlapci mali len nejasnú predstavu o tom, ako sa hrá basketbal, čiže rozdelili podlahu na nie dve, ale na celú kopu zón v tvare obdĺžnikov – a neboli to ani len rovnako veľké obdĺžniky! Žiaľ, jediné, čo vieme, sú obvody niektorých obdĺžnikov...“



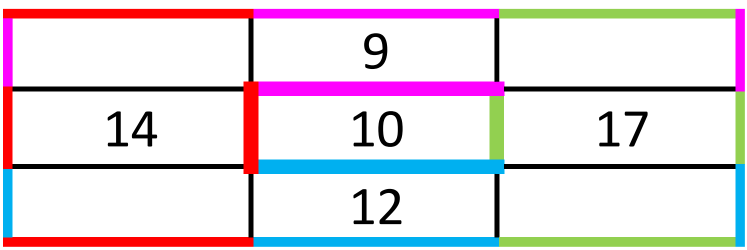


Číslo vnútri každého obdĺžnika značí jeho obvod. Dve miestnosti boli rozdelené na obdĺžniky ako na obrázkoch. Aký bol obvod celej prvej miestnosti? Aký bol obvod celej druhej miestnosti?

Pozrime sa najprv na prvý prípad. Vyznačme si jednotlivé obdĺžničky v obrázkoch každý inou farbou, nech je jasné, o ktorých sa rozprávame.

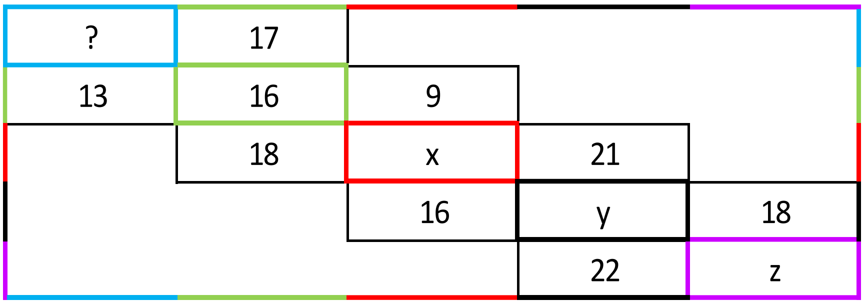


Prvý obrázok ilustruje zadanie s farebne vyznačenými, a pre nás dôležitými, obdĺžnikmi. Niektoré strany týchto farebných obdĺžnikov vieme premietnuť na strany veľkého obdĺžnika tak, že si zachovajú svoju veľkosť (druhý obrázok).

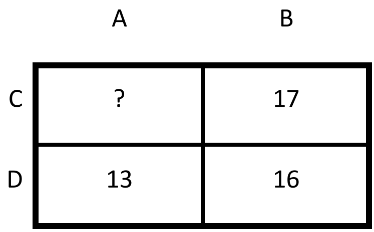


Z dolného obrázka vidíme, že obvod veľkého obdĺžnika je o niečo menší ako súčet obvodov červeného, ružového, zeleného a modrého obdĺžnika. Čo je to niečo? No predsa súčet strán, ktoré nám ostali ako vpísaný obdĺžnik. Zo zadania vieme, že jeho obvod je 10. Tak už to len všetko dáme dohromady, teda súčet obvodov fialového, modrého, červeného a zeleného mínus obvod stredového obdĺžniku: 9+12+14+17-10=42 (jednotky neboli uvedené, pretože chlapci o tom nemali predstavu, ale že ani najmenšiu).

Poďme teraz riešiť druhú časť, keďže prvú sme zvládli. Tak, ako sme to spravili na minulom obrázku, spravíme to aj tu, presunieme si všetky strany na kraj. Z toho hneď môžeme vidieť, že keď spočítame obvody obdĺžnikov na uhlopriečke (vyznačené farebne), tak budeme mať celkový obvod, ktorý chceme zistiť.



Preto sa naučme ďalší trik, ktorý môžeme neskôr využiť. Ak máme obdĺžnik, ktorý je rozdelený na štyri obdĺžničky a my vieme obvody troch z nich, vieme dopočítať obvod štvrtého. Pozrime sa napríklad na štyri obdĺžničky v ľavom hornom rohu.



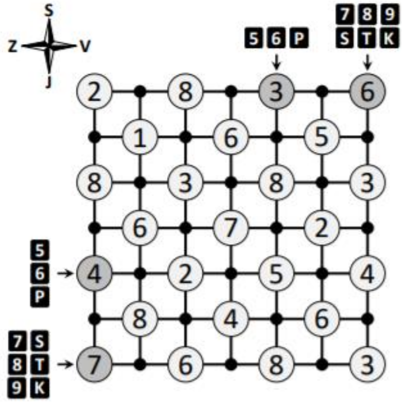
Ich spoločný obvod je rovný o=2A+2B+2C+2D. Keď sa pozrieme na súčet obvodov dvojice obdĺžničkov susediacich iba rohom (v našom prípade súčet ?+16 alebo 13+17) v tomto 2×2 obdĺžniku, vidíme, že to je tiež 2A+2B+2C+2D. Keďže majú však obe dvojice rovnaký súčet, tak nutne platí ?+16=13+17. Čiže zo znalosti troch obvodov vieme dopočítať štvrtý obvod ?=14. Takto si dohľadáme všetky potrebné políčka na „uhlopriečke", aby sme mohli spraviť trik s uhlopriečkou, a keď všetky obvody spočítame, budeme mať celkový obvod miestnosti.

Zo švtorice obdĺžnikov s obvodmi 16, 18, 9 a x zistíme, že obvod **x=11.** To môžeme potom použiť ďalej - zo štvorice s obvodmi x, 16, 21 a y už poznáme tri a ľahko zistíme, že obvod y =11. Rovnakou úvahou dostaneme aj, že obvod z=14. Teda súčet obvodov obdĺžnikov na uhlopriečke, čo je aj náš hľadaný obvod miestnosti, nám vyjde o=?+16+x+y+z=14+16+11+26+14. Odtiaľ už ľahko vidíme, že obvod miestnosti je o=81 (opäť chlapci netušili, akú jednotku sem majú dať, mali by asi skúsiť riešiť Pikofyz).

Bodovanie:
za prvú podúlohu – 1,6b. (za správny výsledok – 0,1b; za kompletný postup – 1,5b); za druhú podúlohu – 3,4b. (za správny výsledok – 0,2b.; za kompletný postup – 3,2b.)

Úloha 3: Na ceste – *Opravovali Martin „Panda“ Svetlík, Sara Gašparová, Dominika Krivdová a Anamária Šutková*

Na mape boli krúžkami s číslami vyznačené zastávky a čiernymi bodkami križovatky. Číslo v krúžku znamenalo cenu v eurách, ktorú treba zaplatiť, ak autobus na danej zastávke začína, končí, alebo ňou prechádza. Navyše za každú križovatku, ktorou prejdú, sa platia ďalšie 2 eurá. „Tu stojíš a sem ideš,“ ukazoval vodič prstom na mape. „Z každej zastávky či križovatky pôjdeme len smerom na sever alebo na východ – neznášam zachádzky. Kľudne si však vyber cestu, ktorú chceš,“ dodal. „Ja zase nemám rád drobné a chcem minúť všetky peniaze, ktoré mám vo vrecku,“ odvetil Kvasostrojič.



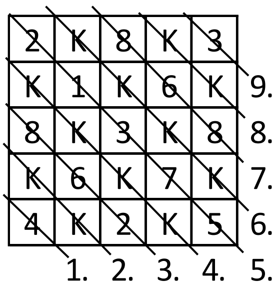
5 6 P: Cesta začínala na zastávke „4“ na západnom okraji mapy a končila na „3“ na severnom okraji mapy. **Koľko ciest mal Kvasostrojič na výber, ak chcel minúť presne 33 eur? Aké rôzne počty križovatiek pri tom mohli prejsť?**

7 8 9 S T K: Cesta začínala na zastávke „7“ v juhozápadnom rohu mapy a končila na „6“ v severovýchodnom rohu mapy. **Koľko ciest mal Kvasostrojič na výber, ak chcel minúť presne 50 eur? Aké rôzne počty križovatiek pri tom mohli prejsť?**

8 9 T K: **Ak by si Kvasostrojič spomedzi všetkých možných ciest z rohovej „7“ do rohovej „6“ vybral jednu náhodne, aká je šanca, že by mu vyšli peniaze presne – teda aké percento ciest z juhozápadného do severovýchodného rohu stojí presne 50 eur?**

K tejto úlohe si odporúčam pozrieť aj videovzorák, kde budú jednotlivé myšlienky vysvetlené trochu podrobnejšie. Nájdete ho tu: https://www.youtube.com/watch?v=NUhcOk9kRBs

Začneme riešením otázky pre nižšie kategórie, avšak myšlienky sú rovnaké aj v otázke pre vyššie kategórie.



Zakreslime si zastávky aj križovatky (označené „K“) do tabuľky a rozdeľme si vzniknuté políčka po uhlopriečkach. Všimnime si, že z každej uhlopriečky musíme prejsť práve jedno políčko – aspoň jedno, lebo inak by sme sa nedostali ďalej, a najviac jedno, lebo keď už sme na jednom z nich, tak ostatné z tej istej uhlopriečky ležia južnejšie alebo západnejšie a už sa k nim nedostaneme.

Vidíme, že na každej uhlopriečke sú buď len zastávky, alebo len križovatky. Križovatkové uhlopriečky sú 4, a tak vždy **prejdeme presne 4 križovatky**. Vidíme, že zastávok prejdeme o jednu viac ako križovatiek, lebo začíname aj končíme na zastávke. **Zastávok teda prejdeme 5. Pre starších na väčšom plániku platí tá istá úvaha a počet prejdených križovatiek je 6, teda zastávok 7**.

Koľko je ciest s cenou 33 €? Určite platím 4 € za začiatok, 3 € cieľ, po 2 € za každú zo 4 križovatiek. Už nám ostáva len vybrať po jednej zastávke z každej zvyšnej zastávkovej uhlopriečky. Ceny týchto zastávok musia dať spolu zvyšnú sumu, teda 33-4-3-4×2=18. Všimneme si, že tretia aj siedma uhlopriečka obsahujú len párne čísla, takže súčet poplatkov za prechod týmito uhlopriečkami bude párny. Na to, aby spolu s poplatkom za piatu uhlopriečku dali dokopy 18 (čo je tiež párne), potrebujeme vybrať aj z piatej uhlopriečky párne číslo. To je jedine číslo 2. Cesta cez toto políčko je len jedna – stále na sever, a potom stále na východ. Skontrolujeme, či cesta cez políčko so sumou 2 € dáva správny súčet 33 € – dáva. Je to teda jediné riešenie pre kat. 5, 6 a P, lebo nemáme iné párne číslo na strednej uhlopriečke.

Pre starších opäť tá istá úvaha, začiatok, koniec a 6 križovatiek dajú spolu súčet 25 €, takže z tých zvyšných piatich uhlopriečok potrebujeme súčet 25 € (spolu to má byť 50). Tretia, piata a deviata uhlopriečka obsahujú len párne čísla, jedenásta len nepárne čísla – za ne teda spolu zaplatíme nepárnu sumu. Za siedmu uhlopriečku tak potrebujeme zaplatiť párnu sumu, keďže 25 je nepárne číslo. Párne čísla sú v siedmej uhlopriečke len dve, 2 a 6. Vyskúšame jedinú (úplne na sever, úplne na východ) cestu cez políčko s číslom 2 – tá vyhovuje, má správny súčet.

Ciest cez políčko s číslom 6 je niekoľko. Zo začiatku do tejto šestky môžeme ísť cez 6+8 (14), 8+4 (12) alebo 6+4 (10), zo 6 do cieľa môžeme ísť 2+5 (7), 4+3 (7) alebo 2+3 (5). Keďže chceme súčet 25 a v strede máme šestku, zvyšných 19 dostaneme ako 14+5 alebo 12+7, alebo 12+7 (druhá kombinácia za 7).

Máme teda tri možné kombinácie čísel, po ktorých ísť. Lenže, každá z nich sú v skutočnosti 4 možné cesty, lebo v prípade, že prechádzam zo zastávky v prvom riadku na zastávku v druhom, tak mám dve možnosti – buď pôjdeme najprv na sever a potom na východ, alebo naopak. To isté platí aj pri prechode z predposledného stĺpca do posledného. Preto pre každú kombináciu čísel existujú 2×2 čiže 4 cesty.

Dokopy máme **13 možných ciest** (1 cez jednotku + 3×4 cez šestku) s cenou 50 €.

Posledná otázka pre kat. 8, 9, T a K je, koľko je to percent zo všetkých ciest. Na to potrebujeme zrátať počet všetkých ciest. Na každé políčko sa vieme dostať len z políčok, ktoré s ním susedia na západe a juhu. Teda počet možných ciest na nejaké políčko bude súčtom počtov ciest na políčko od neho na juh a na západ. Začnem si teda do tabuľky vpisovať čísla – na všetky políčka v prvom riadku a prvom stĺpci máme len jednu možnosť (stále na sever resp. východ) a ostatné dopĺňam podľa tohto pravidla. Vyjde nám, že na cieľové políčko vo veľkom plániku je 924 ciest.

1	5	...	...	...
1	4	10	...	...
1	3	6	10	...
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

Kto sa vyzná v kombinatorike, môže si povedať, že potrebujeme spraviť 12 pohybov, z toho 6 na sever, takže možností je $\binom{12}{6} = \frac{12!}{6!\cdot(12-6)!} = 924$. A teda 13 ciest z 924 je

$$13 \div 924 \cdot 100\% \doteq 1{,}4069\%.$$

Toto vzorové riešenie popísalo jeden z tých krajších spôsobov riešenia, ale samozrejme, dalo sa na to prísť aj inak. Ak si však chcete tento spôsob pozrieť aj vizuálne, môžete si pozrieť videovzorák.

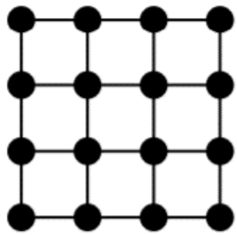
Bodovanie:

Pri tomto spôsobe boli body udeľované podľa tabuľky. Ak ste napríklad namiesto diagonál a parity použili niečo iné na nájdenie správnych ciest, bodov ste za to mohli dostať rovnako.

	56P	7S	89TK
Počet križovatiek (odpoveď)	0,5	0,5	0,5
Myšlienka s diagonálami	1	1	1
Cesty cez správne čísla	3,5	2,5	1,5
Cesty cez šestku 4×	-	1	0,5
Všetky cesty + percentá	-	-	1,5

Úloha 4: Zmrzlina – *Opravovali Karolína Pisoňová a Michaela Rusnáková*

Chlapík zobral podnos a nakreslil naň mriežku 3 × 3 štvorce. Potom zobral 16 zmrzlinových pohárov a postavil ich do vrcholov týchto štvorcov. Deťom, ktoré k nemu počas cesty autobusom chodili nakupovať, dával nasledovnú možnosť: môžu si vybrať ľubovoľný štvorec 1 × 1, 2 × 2 alebo 3 × 3, a ochutnať po lyžičke zo všetkých štyroch vrcholov tohto štvorca. Predavač si ale veľmi rýchlo uvedomil, že ho toto za chvíľu zruinuje, tak sa rozhodol odstrániť zopár pohárov. Nechce ale veľmi riediť svoju ponuku. **Koľko najmenej pohárov musel predavač odstrániť, aby každému zo 14 štvorcov (deviatim 1 × 1, štyrom 2 × 2 a jednému 3 × 3) v tabuľke chýbal:**

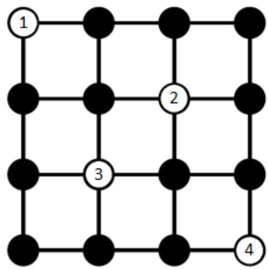


A) Aspoň jeden vrchol?

B) Aspoň dva vrcholy?

Nezabudni zdôvodniť, prečo menej pohárov odobrať nestačí.

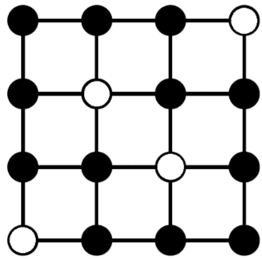
Zo zmrzlinových pohárov vieme vytvoriť štyri štvorce 1×1 v rohoch tak, aby nemali ani jeden spoločný vrchol. Ak chce predavač odstrániť poháre tak, aby každému štvorcu chýbal aspoň jeden vrchol, musí aj každému z týchto štvorcov odstrániť aspoň jeden pohár. Preto musí chlapík odstrániť aspoň 4 poháre. Teraz poďme zistiť, či vieme odstrániť naozaj len 4 poháre tak, aby každému štvorcu chýbal pohár v aspoň jednom vrchole.



Štvorcu 3×3 musí chýbať pohár v aspoň jednom vrchole, takže musíme určite odstrániť jeden z rohových pohárov. Nezáleží na tom ktorý. Keďže poháre v strede sú vrcholmi viacerých štvorcov ako tie na kraji, tak ďalej odstránime jeden pohár zo stredu. Stredné poháre, ktoré netvoria štvorec s už odstráneným pohárom, sú vrcholom viacerých štvorcov. Takže ako druhý pohár odstránime jeden z nich.

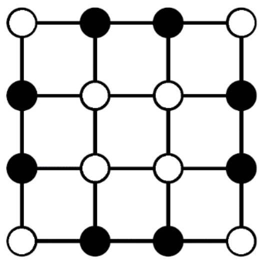
Zostalo nám 5 štvorcov, ktoré nemajú odobratý pohár zo žiadneho z vrcholov, konkrétne tri štvorce 1×1 (v našom obrázku spodné tri) a dva štvorce 2×2 (v našom obrázku pravé dva). Pohár v strede, ktorý je na uhlopriečke štvorca 1×1 s už odstráneným stredným pohárom, zaberá až tri z týchto piatich štvorcov, takže ho odstránime. Zvyšné dva zaberá rohový pohár, takže odstránime aj ten.

Chlapíkovi preto stačí odstrániť štyri poháre a môže to urobiť napríklad tak, ako na obrázku. Keďže vieme, že odstrániť menej pohárov by nestačilo, správna odpoveď je, že **musí odstrániť najmenej 4 poháre.**



Druhú otázku zodpovieme podobným spôsobom. Spomínaným štyrom štvorcom 1×1, ktoré nemajú spoločný ani jeden vrchol, chceme tentokrát odstrániť poháre z aspoň dvoch vrcholov. Preto musíme odstrániť minimálne 4·2=8 pohárov.

Zoberme si rozostavenie, v ktorom sme každému štvorcu odstránili pohár v aspoň jednom z vrcholov, a otočme ho o 90° stupňov doprava. V tomto rozostavení sme rovnako každému štvorcu odstránili aspoň jeden pohár z vrcholu.



Ak tieto dva štvorce, pôvodný aj otočený, prekryjeme, žiadne dve miesta po odstránených pohároch sa neprekryjú. Takže máme z každého štvorca odobraté dva rôzne poháre z vrcholov a dokopy odobratých 8 pohárov. Našli sme vhodné usporiadanie ôsmich odstránených pohárov, pričom sme každému štvorcu odobrali aspoň dva poháre z jeho vrcholov.

Chlapíkovi stačí odstrániť osem pohárov a môže to spraviť napríklad tak ako na poslednom obrázku. Vieme, že menej ako 8 pohárov nestačí, ale 8 stačí, preto **8 pohárov je správnym riešením**.

Bodovanie:
za správne výsledky jednotlivých podúloh – 2×1b.; za odôvodnenie, prečo sa nedá odobrať menej ako 4 poháre v prvej podúlohe – 2b.; za odôvodnenie, prečo sa nedá odobrať menej ako 8 pohárov v druhej podúlohe – 1b.

Úloha 5: Množstvo sedadiel – *Opravovali Martin Kliment a Peter Kochelka*

Autobus sa skladal z párneho počtu sekcií oddelených zábradliami. V prvej sekcii bol nejaký počet sedadiel. V každej ďalšej sekcii je počet sedadiel dvojnásobný oproti tej predošlej. Kvasostrojič si všimol, že prvá polovica sekcií mala dokopy o 450 sedadiel menej než druhá polovica sekcií. **Koľko sekcií mohlo byť v autobuse? Kvasostrojiča zaujímajú všetky možnosti.**

Táto úloha môže byť na prvý pohľad vcelku náročná, pretože nevieme, koľko tých sekcií vlastne môže byť a nie je vôbec jednoduché to zistiť pomocou nejakého výpočtu. Ak sa však nezľakneme a začneme usilovne preverovať jednotlivé možnosti, tak už sa vcelku jednoducho dopracujeme k hľadaným výsledkom.

Poďme sa teda zamyslieť nad prípadom, že by boli iba 2 sekcie. Označme si počet sedadiel v prvej sekcii ako **x**. V druhej sekcii bude teda dvojnásobný počet sedadiel, čiže **2x**. To si môžeme takto schematicky zaznačiť v tabuľke:

1. polovica sekcií	2. polovica sekcií
x	2**x**

Vieme, že keby bolo v prvej sekcii o 450 sedadiel viac, tak by ich bolo rovnako veľa ako v druhej sekcii. Môžeme preto zostaviť nasledovnú rovnicu:

$$\boldsymbol{x} + 450 = 2\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x} = 450$$

Teda vidíme, že **autobus môže mať dve sekcie** a v takom prípade bude v prvej sekcii 450 sedadiel. Poďme sa teraz podobným spôsobom zamyslieť nad prípadom, že by boli 4 sekcie (keďže ich má byť párny počet). Znovu môžeme využiť našu tabuľku:

1. polovica sekcií		2. polovica sekcií	
x	2**x**	4**x**	8**x**

Vieme, že keby bolo v prvej polovici sekcií o 450 sedadiel viac, tak by ich bolo rovnako veľa ako v druhej polovici sekcií. Takže môžeme zostaviť rovnicu:

$$\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} + 450 = 4\boldsymbol{x} + 8\boldsymbol{x}$$
$$450 = 9\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x} = 50$$

Čiže **autobus môže mať 4 sekcie** a v takom prípade bude v prvej sekcii 50 sedadiel. Teraz rovnako preveríme prípad šiestich sekcií:

1. polovica sekcií			2. polovica sekcií		
x	2**x**	4**x**	8**x**	16**x**	32**x**

$$\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{x} \ + 450 = \ 8\boldsymbol{x} + 16\boldsymbol{x} + 32\boldsymbol{x}$$
$$450 = 51\boldsymbol{x}$$

Vidíme, že v tomto prípade nám nevyjde počet sedadiel v prvej sekcii celé číslo. Preto autobus nemôže mať šesť sekcií. Ďalej sa pozrime na prípad ôsmich sekcií:

1. polovica sekcií				2. polovica sekcií			
x	2**x**	4**x**	8**x**	16**x**	32**x**	64**x**	128**x**

$$\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{x} + 8\boldsymbol{x} + 450 = 16\boldsymbol{x} + 32\boldsymbol{x} + 64\boldsymbol{x} + 128\boldsymbol{x}$$
$$450 = 225\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x} = 2$$

Takže autobus **môže mať 8 sekcií** a v takom prípade budú v prvej sekcii 2 sedadlá.

Prípad desiatich sekcií:

1. polovica sekcií					2. polovica sekcií				
x	2**x**	4**x**	8**x**	16**x**	32**x**	64**x**	128**x**	256**x**	512**x**

$$\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{x} + 8\boldsymbol{x} + 16\boldsymbol{x} + 450 = 32\boldsymbol{x} + 64\boldsymbol{x} + 128\boldsymbol{x} + 256\boldsymbol{x} + 512\boldsymbol{x}$$
$$450 = 961\boldsymbol{x}$$

Vidíme, že v tomto prípade nám nielenže nevyjde počet sedadiel v prvej sekcii celé číslo, ale dokonca číslo menšie ako 1. Uvedomme si tiež, že keby sme ďalej pokračovali a zvyšovali počet sekcií, tak by sme mali na pravej strane rovnice stále väčšie a väčšie čísla. To znamená, že riešením týchto rovníc už nikdy nebude celé číslo (pretože toto riešenie bude vždy menšie ako 1).

V autobuse mohlo byť **2**, **4** alebo **8** sekcií.

Bodovanie:
za správny výsledok – 1b.; za kompletný postup – 4b.

Úloha 6: Džús – *Opravovali Juraj Jankovich a Nicol Richter*
Deti používali tri poháre s objemami 2 dl, 4 dl a 6 dl. Mama mala džbán s objemom 9 dl plný džúsu. **Dá sa džús rozliať tak, aby v 3 nádobách bolo po 3 dl džúsu? Ak áno, ako? Ak nie, prečo?** Nádoby nemajú žiadnu mierku. Z nádoby vieme odliať buď všetko, čo v nej je, alebo toľko, že naplníme nádobu, do ktorej prelievame. Iné nádoby než uvedené tri poháre a džbán nie sú k dispozícii.

Našou úlohou je rozdeliť 9 decilitrov džúsu tak, aby sme mali 3 decilitre v troch nádobách súčasne, pričom máme nádoby s objemami 2, 4, 6 a 9 decilitrov. S džúsom môžeme manipulovať iba dvoma úkonmi. Buď z prvej nádoby odlejeme do druhej všetko, alebo toľko, že naplníme nádobu, do ktorej džús prelievame.

Na začiatku máme v jednej nádobe nepárny objem džúsu (9 decilitrov) a v ostatných párny (0 decilitrov). Chceme dostať tri nepárne objemy (3 decilitre) a jeden párny (0 decilitrov). Budeme sa teda pozerať, ako sa mení parita objemov džúsu v nádobách pri daných úkonoch.

Pri prvom úkone si rýchlo uvedomíme, že ním nezvýšime počet nepárnych objemov. Ak bol objem džúsu v prvej nádobe párny, tak po úkone bude tiež párny (0 decilitrov) a v druhej nádobe pribudne ešte párny objem. Ale ak v druhej nádobe pred úkonom bol párny objem, po úkone zostane objem džúsu párny (párne+párne=párne). Preto nevyrobíme **nový nepárny objem**. Ak starý objem v druhej nádobe bol nepárny, tak zostane nepárny (nepárne+párne=nepárne), čo ale nie je *nový* nepárny objem. Ak bol objem džúsu v prvej nádobe nepárny, po úkone bude párny a síce nulový! Teda aj keby v druhej nádobe vznikol nepárny objem, **jeden sme stratili**. Preto počet nepárnych objemov neporastie.

Pozrime sa na druhý úkon. Toto prelievanie si vieme predstaviť ako odčítanie objemu druhej nádoby od prvej (a naplnenie druhej nádoby). Pozrime sa, ako sa správajú párne a nepárne čísla pri odčítaní.

párne-párne=párne
nepárne-nepárne=párne
párne-nepárne=nepárne
nepárne-párne=nepárne

Bude nás teda zaujímať možnosť, v ktorej dostaneme **nepárne číslo z párneho**, pretože vtedy vznikne *nové* nepárne číslo. A to je len v prípade, že od neho odpočítame nepárne (hrubo vyznačená možnosť). Čo v našom prípade nemôže nastať! Nádoby s objemami 2, 4 a 6 decilitrov totiž majú párne objemy. Teda ak do nich prelievame džús, zjavne sa nezmení parita objemu džúsu v prvej nádobe (pozri vyššie). A ak ako druhú (tú, do ktorej prelievame) chceme použiť 9-decilitrovú nádobu, musíme do nej naliať všetok džús, ktorý máme k dispozícií, inak sa nenaplní (a pôjde o prvý úkon).

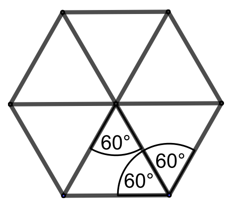
Ukázali sme, že ani prvý ani druhý úkon nikdy nezvýši počet nádob s nepárnym objemom džúsu. Preto nikdy nemôžeme dostať 3 decilitre džúsu v troch nádobách.

Bodovanie:
za správny výsledok – 1,5b.; za ukázanie, že pri prelievaní džúsu sa nemení počet nádob s nepárnym množstvom džúsu – 1,5b.; za kompletný postup – 2b.

Úloha 7: Vojna mravcov – *Opravoval Marián Poturnay*

Na zemi bol vysypaný cukor v tvare rovnoramenného trojuholníka *ABC* so základňou *BC*. Zbehli sa k nemu dve armády mravcov. Ku strane *AC* sa postavila armáda Montegmravcov do tvaru štvorca *ACDE*. Veliteľ Montegmravcov stál v bude *C*, ich zved stál v bode *E*. Ku strane *AB* sa zas rozostavila armáda Kapuletmravcov do tvaru pravidelného šesťuholníka *ABFGHI*. Veliteľ Kapuletmravcov stál v bode *B*, ich zved stál v bode *I*. Po chvíli napätého čakania obe armády vyslali svojich zvedov po priamke k nepriateľskému veliteľovi (teda zveda z *E* do *B* a zveda z *I* do *C*). **Pod akým uhlom sa pretnú dráhy zvedov?**

Príprava na riešenie úlohy

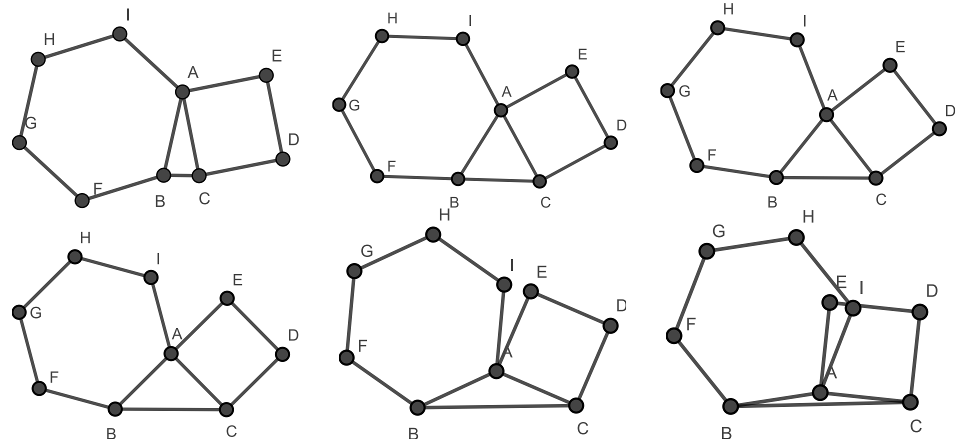


V úlohe sa nám zíde, že budeme vedieť, akú veľkosť má uhol pri vrchole pravidelného šesťuholníka. K tomuto nám pomôžu rovnoramenné trojuholníky (ktoré budú dokonca rovnostranné, ale to potrebovať nebudeme). Ak si totiž nakreslíme do pravidelného šesťuholníka jeho stred a spojíme ho so všetkými vrcholmi, dostaneme šesť rovnakých (zhodných) rovnoramenných trojuholníkov. Budú rovnaké, a preto budú mať aj rovnaký uhol pri vrchole, ktorým je stred šesťuholníka. Všetky tieto uhly majú ale spolu $360°$, a tak bude mať jeden z týchto uhlov veľkosť $360°: 6 = 60°$. Vďaka tomu, že sú rovnoramenné, vieme dopočítať, že aj zvyšné uhly týchto trojuholníkov majú veľkosť $60°$. **Uhol pri vrchole pravidelného šesťuholníka**, ktorý sa skladá z dvoch uhlov pri základni týchto rovnoramenných trojuholníkov, tak **má veľkosť $\mathbf{2 \cdot 60° = 120°}$**.

Podobným spôsobom by sme vedeli zistiť veľkosť uhla pri vrchole ľubovoľného pravidelného mnohouholníka, ale to v tejto úlohe potrebovať nebudeme.

Riešenie úlohy

Začnime zľahka tým, že si nakreslíme obrázok. Hneď pri tom môžeme zistiť, že už i taká jednoduchá vec, ako nakresliť si obrázok, nemusí byť taká jednoduchá. Teraz nehovorím o tom, aké ťažké je nakresliť si to na papier (sám by som s tým mal problémy), ale o tom, že náš obrázok môže vyzerať rôzne.



To, že máme šesť rôznych obrázkov pre jedno zadanie, môže a nemusí spôsobovať problémy. Zatiaľ nám to ale problémy nerobí, takže môžeme ďalej rozmýšľať, ako pohnúť s úlohou. Všimnime si ale, že všetky tieto možné situácie vieme dostať len tým, že budeme meniť uhol BAC. Z toho môžeme očakávať, že veľa vlastností našej situácie bude závisieť práve od tohto uhla. Ak budeme potrebovať vyjadrovať nejaké uhly, tak to bude najlepšie robiť pomocou tohto uhla. Preto si ho pre zjednodušenie označme jedným písmenkom namiesto troch tak, že $|\sphericalangle \boldsymbol{BAC}| = \boldsymbol{\alpha}$.

Pohrajme sa s tým, čo sme v zadaní dostali. Vieme, že trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou BC, takže v ňom platí $|AB| = |AC|$. Ďalej sme v zadaní dostali, že $ACDE$ a $ABFGHI$ sú pravidelné mnohouholníky (presnejšie pravidelný štvoruholník a pravidelný šesťuholník). Sú pravidelné, čo nám dáva v každom z nich veľa úsečiek rovnakej dĺžky. Konkrétne máme $|\boldsymbol{AC}| = |\boldsymbol{CD}| = |\boldsymbol{DE}| = |\boldsymbol{AE}|$ a $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BF}| = |\boldsymbol{FG}| = |\boldsymbol{GH}| = |\boldsymbol{HI}| = |\boldsymbol{AI}|$. Tieto rovnosti nám spolu s rovnosťou $|AB| = |AC|$ dávajú, že **všetkých týchto desať dĺžok je rovnako veľkých**.

Máme teda desať úsečiek rovnakej dĺžky. To je priam živná pôda na to, aby tvorili nejaké rovnoramenné trojuholníky. Ak odhliadneme od takých zrejmých, ako sú rovnoramenný trojuholník ABC alebo trojuholníky tvorené susediacimi stranami pravidelných mnohouholníkov, tak nájdeme aj dva menej zrejmé – **rovnoramenné trojuholníky** $\boldsymbol{BAE}$ **a** $\boldsymbol{CAI}$, pretože máme $|AB| = |AE|$ a $|AC| = |AI|$. Samozrejme to funguje iba za predpokladu, že daná trojica bodov neleží na jednej priamke – v opačnom prípade síce netvoria trojuholník, ale stále sú pre nás zaujímavé.

Tým sme vyčerpali „svet dĺžok“ a môžeme prejsť do „sveta uhlov“. Trojuholníky (prípadne len trojice bodov na priamke) BAE a CAI nám hovoria niečo o uhloch pri čiarach BE a CI. To sú ale presne tie čiary, o ktorých potrebujeme zistiť, pod akým uhlom sa pretínajú. Na to, aby sme s tým vedeli niečo spraviť, potrebujeme vypočítať niektorý z uhlov v týchto trojuholníkoch. O čiarach BE a CI toho vieme málo, zatiaľ čo o iných čiarach vieme možno o čosi viac. Preto by mohli byť uhly BAE a CAI najľahšie spočítateľné.

<u>Tu ale nastáva problém!</u> Ako napríklad spočítať veľkosť uhla BAE? Ak sa pozrieme na prvé tri z našich obrázkov, tak si povieme, že jeho veľkosť je predsa súčtom veľkostí uhlov α a CAE (ktorý je pravý, teda má veľkosť $90°$). V týchto prípadoch by sme teda dostali, že **veľkosť uhla $\boldsymbol{BAE}$ je $\boldsymbol{90° + \alpha}$**. Ak sa ale pozrieme na posledné dva obrázky, tak vidíme, že uhly α, BAE a CAE spolu dávajú $360°$. V týchto prípadoch bude mať **uhol $\boldsymbol{BAE}$ veľkosť $\boldsymbol{270° - \alpha}$**. Zostal nám už len jeden obrázok situácie. V ňom ale ležia body B, A, E na priamke, a tak má uhol BAE veľkosť $180°$. Ľahko si môžeme overiť, že pre toto fungujú oba zo zvýraznených vzťahov, pretože vtedy máme $\alpha = 90°$.

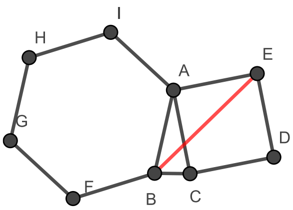
Podobným spôsobom vieme zistiť veľkosť uhla CAI. Keďže súvisí s uhlami α a BAI (ktorý má veľkosť $120°$), tak nám v predošlých úvahách stačí nahradiť každý uhol s veľkosťou $90°$ uhlom s veľkosťou $120°$. Dostávame tak, že **veľkosť uhla $\boldsymbol{CAI}$ je buď $\boldsymbol{120° + \alpha}$, alebo $\boldsymbol{240° - \alpha}$**.

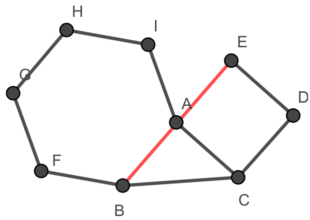
Poďme sa už pokúsiť vypočítať uhol, ktorý zvierajú *priamky* BE a CI. Aby sme sa vedeli lepšie vyjadrovať, tak si označme ich priesečník X. Na tomto mieste si môžeme všimnúť ďalší problém. Zadanie úlohy sa nás pýta, pod akým uhlom sa pretnú *úsečky* BE a CI. O priamkach vieme, že sa buď pretínajú, alebo sú rovnobežné. V tomto prípade sa nemôže stať, že by tieto úsečky boli rovnobežné (ako uvidíme neskôr), a tak sa budú BE a CI pretínať ako *priamky*. To ale nezaručuje, že sa budú pretínať *úsečky* BE a CI. Dokonca na poslednom z obrázkov vyššie sa niečo takéto stalo - *úsečky* BE a CI sa nepretli. Môžu teda nastať dve situácie. Ak sa tieto úsečky nepretínajú, tak máme hotovo a nemusíme ďalej nič riešiť. Ak sa pretínajú, tak môžeme s čistým srdcom označiť ich priesečník, bárs aj písmenkom X. Odteraz preto môžeme predpokladať, že tento bod existuje. Dokonca si môžeme úlohu zjednodušiť a uvažovať BE a CI ako *priamky* – keď vypočítame nejaký uhol ako výsledok, tak povieme, že buď to je výsledok, alebo sa BE a CI ako *úsečky* nepretínajú.

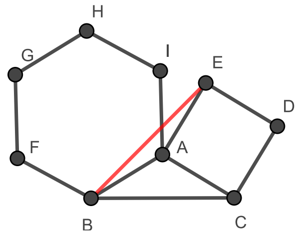
Naším cieľom bude sa dostať k veľkosti uhla BXC. Keď už vieme niečo o uhloch BAE a CAI, tak by sme mohli zistiť niečo o uhloch ABC a ACB a pomocou nich zistiť niečo o uhloch XBC a XCB. Z nich by sme už jednoducho dopočítali veľkosť uhla BXC z trojuholníka s rovnakým názvom.

Uhly $\boldsymbol{ABC}$ **a** $\boldsymbol{ACB}$ zistíme ľahko, pomocou rovnoramenného trojuholníka ABC. Preto majú veľkosť $\frac{180°-\alpha}{2} = \boldsymbol{90° - \frac{\alpha}{2}}$.

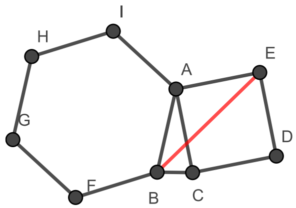
Keď sa ale snažíme dostať k uhlom XBC a XCB, <u>tak znova vzniká problém</u>! Vezmime si taký uhol XBC (ktorý bude rovnaký ako uhol EBC). Jeho veľkosť sa môže rovnať aj rozdielu veľkostí uhlov ABC a ABE, aj ich súčtu, ale aj iba veľkosti samotného uhla ABC. Všetko to znova závisí od konkrétnej situácie – od toho, ako je umiestnená úsečka BE vzhľadom na uhol ABC.





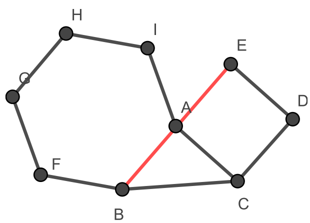


Dobrá správa pre nás je, že to, na aké prípady sa to rozdeľuje, je presne rovnaké, ako keď sme rozlišovali prípady pre veľkosť uhla BAE. Čakajú nás teda tri prípady podľa troch obrázkov.



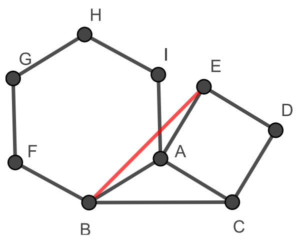
<u>Prípad 1.</u>
V tomto prípade je veľkosť uhla BAE rovná $90° + \alpha$. Uhol EBC (ktorý je náš XBC) sa rovná rozdielu veľkostí uhlov ABC a ABE. Veľkosť uhla ABE je z rovnoramenného trojuholníka ABE rovná $\frac{180°-(90°+\alpha)}{2} = 45° - \frac{\alpha}{2}$. Veľkosť uhla EBC je potom:

$$\left(\mathbf{90°} - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}\right) - \left(\mathbf{45°} - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}\right) = \mathbf{45°}$$



<u>Prípad 2.</u>
Tento prípad je špecifický tým, že body B, A, E ležia na priamke. Ako sme si už povedať, platí tu $\alpha = 90°$. Veľkosť uhla EBC je rovnaká ako veľkosť uhla ABC. Tá je:

$$\mathbf{90°} - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} = \mathbf{45°}$$



<u>Prípad 3.</u>
V poslednom z prípadov má uhol BAE veľkosť $270° - \alpha$ a uhol EBC sa rovná súčtu veľkostí uhlov ABC a ABE. Veľkosť uhla ABE je v tomto prípade rovná $\frac{180°-(270°-\alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2} - 45°$. Z toho už ľahko dopočítame, že veľkosť uhla EBC je:

$$\left(\mathbf{90°} - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}\right) + \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} - \mathbf{45°}\right) = \mathbf{45°}$$

Akoby zázrakom sme vo všetkých prípadoch dostali, že **veľkosť uhla $\boldsymbol{EBC}$ je $\mathbf{45}$**°. Keby sme podobnú rozoberačku prípadov spravili pre uhol ICB, dostali by sme v každom z prípadov, že **veľkosť uhla ICB je $\mathbf{60}$**°. Z tohto aj vyplýva, že priamky BE a CI sú vždy rôznobežné. Aby boli rovnobežné, museli by tieto dva uhly mať spolu $180°$ (toto sa dá ľahko si všimnúť – ak by boli rovnobežné, tak striedavý uhol k jednému z týchto uhlov by musel byť susedný k tomu druhému).

Zostáva nám spraviť už len posledný krok – dopočítať veľkosť uhla BXC z trojuholníka s rovnakým názvom. Vieme v ňom, že **veľkosť uhla $\boldsymbol{XBC}$ je rovnaká ako veľkosť uhla $\boldsymbol{EBC}$, čiže $\mathbf{45}$**°. Taktiež vieme, že **veľkosť uhla $\boldsymbol{XCB}$ je rovnaká ako veľkosť uhla $\boldsymbol{ICB}$, teda $\mathbf{60}$**°. Veľkosť uhla BXC je tak:

$$\mathbf{180°-(45°+60°)=75°}$$

Dráhy zvedov sa preto buď nepretnú, alebo sa pretnú pod uhlom $75°$.

Bodovanie:
za vyjadrenie veľkostí vnútorných uhlov štvorca $ACDE$ a šesťuholníka $ABFGHI$ – 0,5b.; za ukázanie rovnoramennosti trojuholníkov BAE a CAI – 0,5b.; za vyjadrenie veľkostí uhlov v trojuholníku ABC pomocou uhla α – 0,5b.; za vyjadrenie veľkostí uhlov v trojuholníku BAE – 0,5b.; za vyjadrenie veľkostí uhlov v trojuholníku CAI – 0,5b; za dopočítanie uhla BXC – 1b.; za ošetrenie všetkých možných prípadov – 1b.; za odpoveď, že výsledný uhol (ak sa dané úsečky pretínajú) je $75°$ – 0,5b.