susediacich domov, súčet bude 1. Keďže domov je 16, takýchto dvojíc môžeme vytvoriť 8. Konkrétnych možností „koho spárovať s kým“ je viacero, ale na tom vlastne nezáleží (na obrázku uvádzam iba dve ako príklad).

Každopádne vidíme, že sčítanie 16 čísel na mape je vlastne to isté, ako keď najprv sčítame vždy po dva susediace domy (vždy s výsledkom 1), a potom sčítame týchto osem dvojíc dokopy, čiže 8·1=8. Hotovo, **pošta by pri vyrovnaní všetkých dlhov získala 8 peňazí** (miestnej charsumskej meny).

Bodovanie:
správny výsledok – 1b.; ak ste len dosadili konkrétne čísla do mapy – 1,5b.; akýkoľvek iný správny postup, z ktorého je zrejmé, že výsledok bude VŽDY rovnaký – 4b.

Úloha S5: Cesty medzi mestami. *Opravovala Ľudmila „Ľudka“ Šimková.*

Každá cesta vedie do dvoch miest – má dva konce. Takže keď zoberieme počet ciest a vynásobíme ho dvoma, dostaneme počet koncov ciest. Kvôli tomuto násobeniu dvojkou je tiež jasné, že počet koncov ciest je párne číslo. Toto je dôležité!

My chceme 10 miest pospájať tak, že v piatich mestách bude končiť párny počet ciest a vo zvyšných piatich mestách bude končiť nepárny počet ciest. Lenže keď všetky tieto konce sčítame, dostaneme nepárne číslo (5-krát nepárne plus 5-krát párne rovná sa nepárne). Ako ale už vieme, počet všetkých koncov ciest je párne číslo. Takže **takáto sieť ciest sa postaviť nedá**.

Bodovanie:
myšlienka, že počet všetkých koncov ciest je párne číslo – 3b.; prečo nevieme mestá pospájať podľa zadania – 2b.

Poznámka:
Ak chceme ukázať, že podľa zadania nevieme pospájať týchto 10 miest, nestačí vyskúšať dve-tri možnosti, ktoré nevychádzajú. Aby sme to naozaj mohli povedať, museli by sme vyskúšať všetky (a tých je v tomto príklade skutočne veľa). Nakresliť si obrázok alebo vyskúšať niektoré možnosti je však dobré. Napríklad si tak ľahšie všimneme, čo sa stane, ak pridáme jednu cestu a o koľko vychádzajúcich ciest z miest budeme mať viac.

p-mat

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

APVV

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09

Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

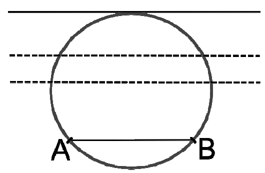
31. ročník www.pikomat.sk školský rok 2013/2014

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti, kategória 8–9

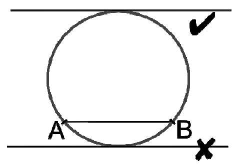
Úloha S1: Mapa. *Opravoval Samuel Sučík.*

Na úvod geometrické okienko. *Sečnica* je priamka, ktorá kružnicu pretína – má s ňou dva spoločné body. *Dotyčnica* ku kružnici je priamka, ktorá sa kružnice dotýka – teda má s ňou práve jeden spoločný bod.

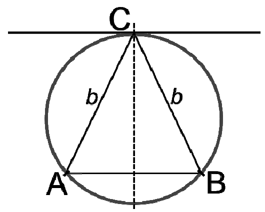
Vrhnime sa na prvú otázku. Mestá Ares, Brom a Charsum budem pre jednoduchosť označovať A, B, C, kružnicu k. Obsah trojuholníka počítame ako $S = c \cdot v_c/2$. Stranu c máme pevne danú vďaka bodom A a B, takže už treba iba nájsť polohu C takú, že výška na stranu AB bude najväčšia možná. Vieme povedať, že C musí ležať na takej rovnobežke s AB, ktorá má s k aspoň jeden spoločný bod (keďže C leží na k) a zároveň je čo najďalej od AB, pretože vzdialenosť medzi rovnobežkou a AB je zároveň veľkosťou v_c. Po krátkom zamyslení a nakreslení obrázka zistíme, že rovnobežka musí byť dotyčnicou kružnice k, pretože keby bola sečnicou kružnice, bude určite k AB bližšie, ako dotyčnica. Na obrázku je plnou čiarou nakreslená dotyčnica, prerušovanou sečnice.



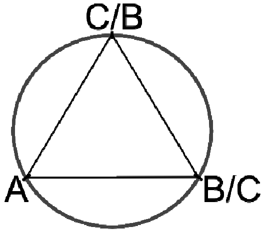
Ešte si musíme uvedomiť, že existujú dve dotyčnice rovnobežné s AB – my si vyberieme tú, ktorá je od AB ďalej, aby sme dosiahli čo najväčšiu v_c (viď druhý obrázok).



Pozrime sa na druhú úlohu. Začneme však krátkym užitočným zamyslením sa nad vlastnosťami trojuholníka, ku ktorému sme sa dostali v prvej úlohe. Pre dotyčnicu kružnice platí, že ak na ňu zostrojíme kolmicu v dotykovom bode, kolmica bude prechádzať stredom kružnice – rozdelíme ju na polovice. Preto aj výška z bodu C bude prechádzať stredom k a vďaka symetrii vidíme, že $|AC|=|BC|$ a trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AB. Pokiaľ by nebol rovnoramenný, musela by v_c prechádzať mimo stredu k, bod C by neležal na dotyčnici a obsah trojuholníka ABC by nebol najväčší možný.



Teraz sa pozrime, ako vytvoriť trojuholník s najväčším možným obsahom, ak máme danú len polohu mesta A na kružnici k. Aké by mal mať vlastnosti? Pri prvej úlohe sme došli k tomu, že ak máme danú základňu, obsah je najväčší vtedy, ak sú zvyšné dve strany rovnakých dĺžok. Teraz to musí platiť, nech si ako základňu zoberieme *hociktorú* stranu. Ak by sa našla základňa, pre ktorú zvyšné dve strany nie sú rovnaké, jednoducho by sme posunuli bod oproti základni tak, aby bol trojuholník rovnoramenný a tým by sme zväčšili jeho obsah. My sme si ale povedali, že máme trojuholník, ktorého obsah sa už nedá zväčšovať, takže nie je čo posúvať. Preto keď si ako základňu zoberieme AB, dospejeme k tomu, že |AC|=|BC|. Pre základňu AC zas musí platiť |AB|=|CB| no a pre základňu BC platí |BA|=|CA|. Odtiaľ vyplýva, že |AB|=|BC|=|AC| a teda náš maximálny trojuholník je rovnostranný. Nevieme síce určiť, ktorý z vrcholov je C a ktorý B, no to už necháme na Ronama.



Bodovanie:
správne odpovede na dve otázky zo zadania – 1b.+1b.; zdôvodnenia pre jednotlivé odpovede – 1,5b.+1,5b.; ak ste pri prvej otázke neuviedli, že dotyčnice môžu byť dve a že treba vybrať tú vzdialenejšiu – mínus 0,3b.

Úloha S2: Známky. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Na prvý pohľad nás môže zaskočiť rečnícka otázka, či je vôbec možné nájsť najväčšie také číslo (sumu). Ak by také číslo existovalo, znamená to, že všetky od neho väčšie čísla dokážeme vyjadriť ako súčet ľubovoľného počtu známok hodnôt **6**, **9** a **20**. Ukázať, že to ide, je tá najdôležitejšia časť celého riešenia.

Poďme teda predpokladať, že počnúc nejakým číslom budeme schopní všetky ďalšie čísla vytvoriť. Je prirodzené, že najskôr začneme skúšať, aké súčty sa dá vyrobiť zo zadaných hodnôt. Rýchlo si všimneme, že len s použitím známok **6** a **9** sa dajú vytvárať čísla 6, 9, 12 (**6**+**6**), 15 (**6**+**9**), 18 (**9**+**9**), atď. Ihneď nám napadne, či takto dokážeme vytvoriť všetky čísla deliteľné tromi, väčšie alebo rovné 6. Začneme so 6-tkou. Číslo o 3 väčšie získame tak, že známku **6** vymeníme za známku **9**, alebo známku **9** vymeníme za dve známky **6**+**6**. Toto sa dá robiť stále dokola, lebo v súčte máme vždy aspoň jednu známku **6** alebo **9**. Vieme teda vytvoriť čísla deliteľné 3, väčšie než 3. A čo s číslami, ktoré nie sú deliteľné 3? Ostáva nám teda ešte ukázať, ako vyrobiť čísla, ktoré dávajú zvyšky 1 alebo 2 po delení tromi.

Tu prichádza do hry známka s hodnotou **20**. Ak pripočítame 20 ku ľubovoľnému číslu deliteľnému 3, stane sa z neho číslo, ktoré dáva po delení tromi zvyšok 2. Je to preto, lebo aj 20 dáva zvyšok 2. Takže teraz vieme vytvoriť aj čísla, ktoré dávajú po delení tromi zvyšok 2. Stačí použiť jednu známku **20**, a zostávajúcu hodnotu (deliteľnú tromi) vyskladať zo **6** a **9**. Toto funguje pre čísla väčšie než 23 (napr. 26 = **20**+**6**, 29 = **20**+**9**, 32 = **20**+**6**+**6**). Vieme síce vyrobiť 20 (použitím jedinej známky), ale nevieme vyrobiť 23.

A ako vyrobíme čísla dávajúce zvyšok 1 po delení tromi? Tu musíme použiť aspoň 2 známky hodnoty **20**. 40 totiž dáva zvyšok 1 po delení tromi, a takisto aj všetky ďalšie čísla, ktoré vytvoríme ako **20**+**20**+**niečo, čo je deliteľné tromi**. Toto funguje pre čísla väčšie než 43. Iné čísla (dávajúce nejaký iný zvyšok než 0, 1 alebo 2 po delení tromi) neexistujú.

Keď to všetko dáme dokopy, vidíme, že je možné poskladať všetky čísla väčšie než 43. Teraz sa už len pozrieme, ktoré je to najväčšie číslo, ktoré ešte nejde poskladať. A veru nemusíme sa pozerať príliš ďaleko. Je to presne 43. Máme výsledok.

Keďže viac než polovica správnych riešení využívala aj iný (menej rozmýšľací, viac prácny) postup, stojí za to spomenúť ho aj tu. Pokiaľ na začiatku nedostávame žiaden nápad, môžeme dôsledne skúšať skladať postupne všetky čísla. 1 - nejde, 2 - nejde, ... 6 - ide, 7 - nejde, ... Okolo čísla 50 nás to zrejme prestane baviť, lebo zrazu tie čísla idú poskladať. Tak sa pozrieme, čo máme. 43 - nejde, 44, 45, 46, 47, 48, 49 - idú. Tu nás osvieti a uvedomíme si, že 50 = 44 + **6**, 51 = 45 + **6**, a tak ďalej. Každé ďalšie číslo vyrobíme tak, že vezmeme o 6 menšie, ktoré ide, a pridáme k nemu známku **6**. Toto funguje od momentu, kedy máme postupnosť 6 čísel, ktoré idú poskladať.

Bodovanie:
5 bodov za správny výsledok 43 a postup, v ktorom je vysvetlené, prečo VŠETKY väčšie čísla dokážeme poskladať. Toto je dôležité. Nestačí len prehlásiť, že „skúsil som niektoré čísla a vyšlo mi to, takže aj všetky ostatné pôjdu vyrobiť“. V matematike si nikdy nie sme istí, že niečo platí pre všetky čísla, pokiaľ sme to overili len pre zopár z nich.
Za drobné chyby som dával dolu 1 bod. Za nekompletný postup (taký, kde nie je jasné, že to platí pre všetky väčšie čísla) ste mohli získať od 1,5 do 3 bodov, podľa kvality vášho uvažovania.

Úloha S3: Odmena. *Opravovala Michaela „Miška“ Zatrochová.*

Pri riešení tohto príkladu bolo najjednoduchšie začať od konca. Vieme, že na konci zostali kočišovi 4 stĺpce bonbónov a že to bola tretina z pôvodného počtu bonbónov. Z toho je nám jasné, že celá bonboniéra musela mať 3·4 = 12 stĺpcov.

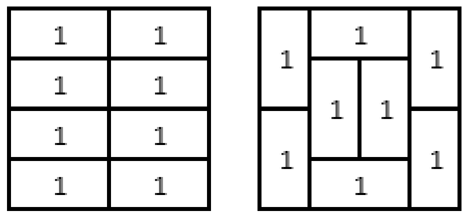
Ďalej vieme, že keď mal kočiš len dva riadky bonbónov, dokázal ich preusporiadať do 5 stĺpcov, v ktorých mu chýbal 1 bonbón. My už ale vieme, že bonboniéra mala 12 stĺpcov, čo je zároveň aj počet bonbónov v jednom riadku! Takže dva riadky museli obsahovať 2·12 = 24 bonbónov. Aby tento počet zaplnil 5 stĺpcov s jedným prázdnym miestom, je jasné, že jeden stĺpec musel byť vysoký 5 bonbónov (24 = 5·5 – 1). **Bonboniéra mala 12 stĺpcov a 5 riadkov, takže pôvodný počet bonbňov bol 12·5 = 60 bonbónov**.

Bodovanie:
správny výsledok s dobrým postupom – 5b.; správny výsledok s čiastočne dobrým postupom – max. 3b.; čiastkový správny/nesprávny výpočet: +/- 1b.

Úloha S4: Mesto Charsum. *Opravoval Lukáš Babula.*

Najnáročnejšou časťou tejto úlohy bolo všimnúť si, že vlastne vôbec nie je náročná. Hneď ale dodávam, že aj (zbytočne) komplikované riešenia mohli dostať plný počet bodov, ak boli správne.

V meste je 16 domov a každý má svoj dlh voči pošte zaznačený jedným číslom (či už kladným alebo záporným) na poštovej mape. Je preto jasné, že ak by všetci svoj dlh splatili, pošta by získala toľko peňazí, aký je súčet všetkých čísel na mape.



Zostáva len zistiť tento súčet. Tu nám veľmi pomôže Ronamove pozorovanie, že každé dva susedné domy majú súčet čísel rovný 1. Takže nech zoberieme akúkoľvek dvojicu