Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

31. ročník www.pikomat.sk školský rok 2013/2014

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Oslava narodenín. *Opravovala Michaela „Miški" Zatrochová.*

Najdôležitejším údajom v tejto úlohe bolo to, že keď sa Mlynárik každého opýtal, koľkokrát si ten človek pri príchode podal ruku, dostal **5 rôznych odpovedí**. Keďže ľudí bolo 6 a nikto si nepodával ruku so svojím partnerom (a samozrejme ani sám so sebou), je jasné, že maximálny počet podaní rúk musel byť 4 – toľkokrát si podal ruku človek, ktorý prišiel ako posledný. Minimálny počet podaní bol samozrejme 0 – toľkokrát si podal ruku človek, ktorý prišiel ako prvý. Takže v rozmedzí od 0 po 4 musel Mlynárik dostať presne týchto 5 rôznych odpovedí: 0, 1, 2, 3 a 4. Z toho tiež vyplýva, že on sám musel mať svoj počet podaní rúk zhodný s niektorým z týchto čísel (žiadna iná možnosť nie je).

Poradie prichádzania nevieme, avšak môžeme si ho odvodiť z počtu podaní. Prvého príchodzieho nazvime A1 (je to ktokoľvek) – počet podaní rúk 0. Druhý príchodzí mohol byť buď z iného páru, alebo partner A1, nazvime ho A2. Ak by to bol A2, tiež by si s nikým nepodal ruku, pretože tam zatiaľ je iba jeho partner. Tretí človek by si potom určite podal ruku 2-krát – s A1 aj A2. To je však problém, pretože v tejto situácii už sa nikdy nestane, že by si niekto podal ruku presne 1-krát, a teda Mlynárik by nemohol dostať odpoveď „1". To znamená, že druhý v poradí nemohol byť A2. Takže druhý prišiel niekto cudzí, nazvime ho B1, a podal si ruku 1-krát.

Pri tretej osobe sú opäť dve možnosti: buď prišiel niekto, kto tam už má partnera (A2 alebo B2), alebo prišiel niekto cudzí – nazvime ho C1. Ak by prišiel A2 alebo B2, ruku by si podal 1-krát. Avšak tu narazíme na problém so štvrtou osobou: ak by štvrtý prišiel C1, podal by si ruku 3-krát a opakuje sa nám problém z predošlého odseku, lebo v tejto situácii už sa nenájde nik, kto by si bol podal ruku presne 2-krát; ak by ako štvrtý prišiel ten druhý človek, ktorý tam už má partnera, znamenalo by to, že poslední prídu partneri C1 a C2, a teda budú mať rovnaký počet podaní rúk: 4-krát (pretože medzi sebou si ruky nepodávajú a ostatní sú už v miestnosti). To by však bol už druhý počet, ktorý by sa opakoval (opakuje sa počet 1 a opakuje sa počet 4), a tým pádom by Mlynárik nemohol dostať 5 rôznych odpovedí. Z toho vyplýva, že tretí musel prísť C1 a podal si ruku 2-krát.

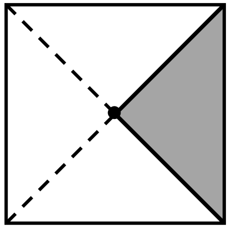
Zvyšní traja (A2, B2, C2) už všetci majú svojho partnera v miestnosti, takže nech budú prichádzať v akomkoľvek poradí, určite si podajú ruku 2-krát, 3-krát a 4-krát. Ukázali sme, že jediný spôsob, ako mohol Mlynárik dostať 5 rôznych odpovedí, sú počty podaní rúk: **0, 1, 2, 2, 3, 4**. Vidíme, že jediný počet podaní rúk, ktorý sa opakuje, je 2. To znamená, že **Mlynárik si pri príchode podal ruku 2-krát**.

Bodovanie:
určenie odpovedí pre Mlynárika 0, 1, 2, 3, 4 – 1b.;
správna odpoveď, že Mlynárik si podal ruku 2-krát – 1b.;
odôvodnenie – 3b.

Úloha S2: Koláč. *Opravoval Matúš Kopf.*

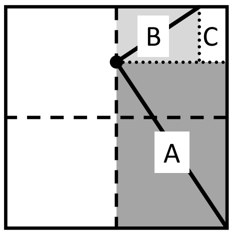
Postupne si rozoberieme rôzne možnosti, kam mohol Strúčik umiestniť prvý bod, a pri každej si ukážeme, že Cibuľka si dokáže pre seba zaistiť aspoň 1/4 koláča. Začneme od tej najjednoduchšej možnosti.

1) Ak Strúčik dá bod do stredu štvorca. Tu si stačí do štvorca dokresliť uhlopriečky a hneď je nám jasné, že keď Cibuľka povedie prvý rez do ktoréhokoľvek vrcholu štvorca, Strúčik mu v ďalšom ťahu určite odreže presne 1/4 koláča (pretože uhlopriečky štvorca sú na seba kolmé a rozdeľujú štvorec na 4 rovnaké časti – viď Obr. 1).



Obr. 1

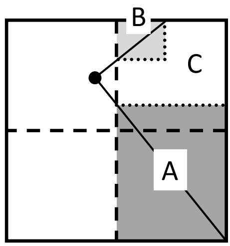
2) Ak Strúčik dá bod na os niektorej strany štvorca. Dokreslíme si do štvorca osi strán. Tu bude Cibuľkova stratégia viesť prvý rez do jedného z dvoch vzdialenejších vrcholov štvorca. Strúčik potom spraví kratší z dvoch možných rezov a dostaneme situáciu ako na Obr. 2. Teraz ale ešte musíme dokázať, že odrezaná časť naozaj vždy bude aspoň 1/4 koláča.



Obr. 2

Pozrieme sa na tú polovicu koláča, z ktorej je kus vyrezaný. Na Obr. 2 vidíme, že z vyznačených obdĺžnikov A a B pripadne Cibuľkovi presne polovica. No a okrem toho mu ostane celá časť C. Vidíme, že Cibuľka dostal viac ako polovicu z polovice štvorca, čiže viac ako štvrtinu štvorca.

3) Ak Strúčik dá bod kamkoľvek inam do štvorca. Aj tu Cibuľka povedie prvý rez do najvzdialenejšieho vrcholu štvorca. Ktorý vrchol je najvzdialenejší, veľmi dobre vidno, ak si opäť do štvorca dokreslíme osi strán. Strúčik potom zase spraví najkratší možný druhý rez. Teraz už len zopakujeme vlastne skoro ten istý dôkaz ako v predošlej možnosti. Ako vidno na Obr. 3, Cibuľkovi opäť pripadne vždy polovica z obdĺžnikov A a B a ešte k tomu celá časť C (teraz dokonca ešte väčšia ako v predošlom prípade). Takže aj tu vidíme, že Cibuľka dostal viac ako polovicu polovice koláča, čiže viac ako štvrtinu.



Obr. 3

Bodovanie:
správna odpoveď – 1b.;
myšlienka viesť rezy buď cez stred, alebo do rohu – 1b.;
kvalita postupu – 2b.;
5 bodov som dával iba za úplné riešenie aj s dôkazom (nestačilo iba napísať, ako má Cibuľka rezať, ale aj prečo tento spôsob rezania funguje).

Úloha S3: Hradná brána. *Opravovala Dominika Iždinská.*

Na bráne bolo napísaných 285 čísel. Zadanie hovorí, že súčet **každej (ľubovoľnej)** štvorice po sebe idúcich čísel je 0. Keďže *285:4 = 71, zvyšok 1*, pokojne môžeme povedať, že máme na prvom mieste číslo 8 a za ním 71 štvoríc, každú so súčtom 0. Tým pádom súčet celého radu musí byť 8+(71·0) = 8+0 = **8**.

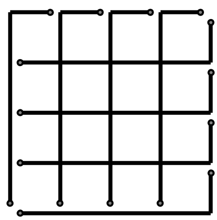
Hoci by bolo úplne stačilo riešenie popísané vyššie, mnohí k úlohe pristupovali trochu komplikovanejšie – bolo to síce zbytočné, ale rozhodne nie nesprávne, a tak si tu ukážeme aj ten komplikovanejší spôsob. Väčšina z Vás sa na číselný rad pozerala akoby „z opačnej strany" – od začiatku. Prvé číslo je 8. Teda prvú štvoricu tvoria čísla (*8, a, b, c*). Aby bol súčet štvorice rovný 0, musí platiť, že *a+b+c = (–8)*. Ďalšia štvorica, ktorá sa dá vytvoriť, je (*a+b+c+d*). Aj táto musí dávať súčet 0, avšak keďže už vieme, že *a+b+c = (–8)*, je jasné, že nasledujúce číslo (*d*) musí byť opäť 8. Ďalšia štvorica bude (*b, c, 8, e*). Keďže však vieme, že ***a****+b+c+8 = 0*, nové číslo (*e*) bude mať rovnakú hodnotu ako (*a*). Rovnakou úvahou zistíme, že nasledujúce čísla sa budú tiež opakovať. Rad teda bude vyzerať takto: *8 a b c 8 a b c 8 a b c, atď.* Čísel je spolu 285 a keďže *285:4 = 71, zvyšok 1*, znamená to, že máme 71 štvoríc a na konci ešte jedno číslo. O štvoriciach vieme určite povedať, že ich súčet je vždy 0 – teda i súčet týchto 284 čísel je 0. Ostáva nám tu len posledné číslo, ktoré (keďže vieme, ako sa čísla v rade opakujú) musí byť 8. Takže súčet celého radu bude 0+8 = **8**.

Bodovanie:
správny výsledok aj s postupom – 5b.;
nesprávny výsledok – mínus 1,5b.;
ďalšie body som strhávala za chyby v uvažovaní, nesprávne pochopenie úlohy alebo nedostatočné vysvetlenie postupu.

Úloha S4: Prívesok. *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková.*

V štvorčekovej sieti 4×4 je **5×5 bodov** (na každej strane je 5 bodov). Lomená čiara je taká čiara, ktorá prechádza od jedného bodu k druhému po spojniciach štvorčekovej siete a dá sa nakresliť **jedným ťahom** bez toho, aby sme museli prechádzať po tej istej spojnici dvoch bodov dvakrát.

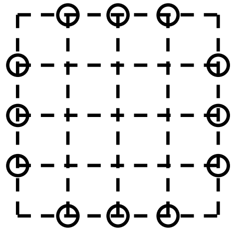
Ľahko zrátame, že v našej sieti sa nachádza **40 spojníc bodov**. V prvej časti úlohy máme 8 lomených čiar dĺžky 5, v druhej časti máme 5 lomených čiar dĺžky 8. V oboch prípadoch je to dokopy 5·8 = 40 spojníc bodov, takže úplne presný počet. To znamená, že lomené čiary sa nesmú nikde prekrývať, lebo tá prekrývajúca sa dĺžka by nám potom niekde inde chýbala.



Obr. 1

Po chvíli skúšania a kreslenia isto nájdeme nejaký spôsob, ako prívesok pokryť 8 lomenými čiarami dĺžky 5. Možností je veľa, na Obr. 1 uvádzam iba jeden príklad. V druhej časti úlohy sa nám však podozrivo dlho nedarí nájsť vyhovujúce rozloženie, až nám napadne, či sa to vôbec dá. Skúsme to teda preskúmať.

Pozrime sa na to, koľko spojníc sa stretáva v jednotlivých bodoch na prívesku. Prívesok má 4 rohové body, pričom v každom rohu sa stretávajú dve spojnice. Takže lomená čiara môže do týchto bodov prísť (po jednej spojnici) a hneď z nich aj odísť (po druhej spojnici). Vo svojom vnútri má prívesok 9 bodov, pričom v každom sa stretávajú 4 spojnice. Cez tieto body môžu prechádzať dokonca až dve lomené čiary. Ostalo nám však ešte 12 krajných bodov (3 na každej strane), z ktorých vychádzajú vždy 3 spojnice – Obr. 2. Keď jedným takýmto bodom prechádza lomená čiara, „spotrebuje“ na to dve spojnice (po jednej príde, po druhej odíde). To ale znamená, že tú tretiu spojnicu môžeme pokryť jedine tak, že nejaká lomená čiara bude mať v tomto bode začiatok alebo koniec. Tým pádom potrebujeme aspoň 12 začiatkov / koncov lomených čiar. V druhej časti úlohy máme však iba 5 lomených čiar, ktoré majú dokopy $5 \cdot 2 = 10$ koncov / začiatkov. Z toho je jasné, že **prívesok 5 lomenými čiarami nikdy nepokryjeme**.



Obr. 2

Bodovanie:
pokrytie prívesku 8 lomenými čiarami – 2b.;
dôkaz, že 5 lomenými čiarami to nejde – 3b.

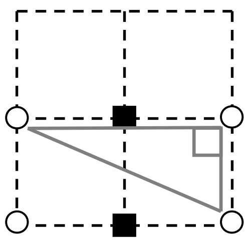
Úloha S5: Hádanka. *Opravoval Juraj „Juro“ Pavlovič.*

Túto úlohu ste riešili mnohými rôznymi spôsobmi. Hoci tu uvediem iba ten najjednoduchší a asi najčastejšie sa vyskytujúci, samozrejme že aj každé iné riešenie, pokiaľ v ňom neboli chyby, dostalo plný počet bodov.

Keď chceme dokázať, že určite vznikne pravouhlý trojuholník z bodov rovnakej farby, postupujeme tak, že sa najprv snažíme nájsť také usporiadanie, v ktorom to nie je pravda, teda v ktorom žiaden taký trojuholník nevznikol. Ak pri tejto snahe narazíme na neprekonateľnú prekážku, znamená to, že pôvodné tvrdenie bolo pravdivé, teda že taký trojuholník naozaj vždy vznikne. Tomuto postupu sa v matematike hovorí *dôkaz sporom*.

Zadanie sa pýta na sieť veľkosti $m \times n$, no zároveň uvádza minimálnu veľkosť 3×3. Tu si stačí uvedomiť, že každá sieť väčšia ako 3×3 v sebe určite niekde obsahuje aj časť s veľkosťou 3×3. Takže ak tvrdenie dokážeme pre sieť 3×3, bude rovnako platiť aj pre všetky väčšie siete $m \times n$.

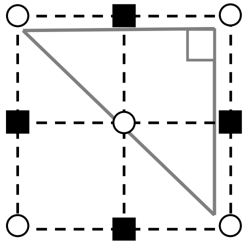
Pozrime sa na to, čo sa stane, ak budú dva susediace body mať rovnakú farbu. Na Obr. 1 vidno, že vznikne hneď niekoľko bodov, z ktorých ak ktorýkoľvek jeden zafarbíme tou istou farbou, vytvorí s pôvodnými dvoma pravouhlý trojuholník. Keďže sa ale práve tomu snažíme zabrániť, neostáva nám iné, ako všetky tieto body zafarbiť tou druhou farbou. Lenže ako je z obrázka tiež zrejmé, tieto body vždy ležia v rohoch obdĺžnika prípadne štvorca. Takže keď ich všetky zafarbíme tou istou farbou, pravouhlý trojuholník určite vznikne. Môžeme teda s istotou vyhlásiť, že akonáhle sú vedľa seba dva body rovnakej farby, určite vznikne pravouhlý trojuholník.



Obr. 1

Nuž ale jedinou možnosťou, kedy nie sú vedľa seba žiadne dva body rovnakej farby, je „šachovnicové“ zafarbenie ako na Obr. 2. A tu tiež už na prvý pohľad vidno, že vznikne pravouhlých trojuholníkov hneď niekoľko.

Ukázali sme, že aj keď budú dva rovnaké body vedľa seba a aj keď nebudú dva rovnaké body vedľa seba, vznikne pravouhlý trojuholník. Žiadna iná možnosť už nastať nemôže, a preto si môžeme byť istí, že **pravouhlý trojuholník vznikne úplne vždy**.



Obr. 2

Bodovanie:

akýkoľvek správny a dostatočne opísaný dôkaz – 5b;
iba ukázaných zopár konkrétnych prípadov a vyhlásenie, že to funguje vždy – 1 až 2b.;
aj pri nesprávnom alebo neúplnom riešení sa dali body získať za rozumné myšlienky a úvahy; za chybné, nepravdivé či neúplné tvrdenia som, naopak, body strhával.

Poznámka:

Mnohí z Vás sa vydali cestou skúšania možností. To nie je nutne zlý postup, avšak musím upozorniť, že aby sa tento postup dal považovať za dôkaz, musí z neho byť nejakým spôsobom zrejmé, že ste naozaj vyskúšali všetky možnosti a že už žiadne iné neexistujú. No a to sa práve pri tejto úlohe ukázalo ako pomerne náročné, keďže spôsobov, ako zafarbiť sieť 3×3 dvoma farbami, je až 512. Je síce pravda, že ak vynechávame prípady, ktoré sa opakujú otočením, zrkadlením alebo iba zamenením farieb medzi sebou, tak počet naozaj rôznych zafarbení je iba asi 50. Ale aj to je stále dosť veľa a okrem toho ani tieto opakujúce sa možnosti často nebolo jednoduché rozoznať.

Každopádne pri skúšaní možností treba vždy mať nejaký systém a najlepšie je nám do riešenia o tom systéme aj napísať. Keď napíšete iba zoznam „všetkých“ možností, v ktorom ale nejaké chýbajú, nemožno za to udeliť veľa bodov. Zato keď popíšete rozumný systém skúšania a potom Vám nejakým omylom aj tak zopár možností unikne, ešte stále určite dostanete nejaké body aj za ten systém.

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat