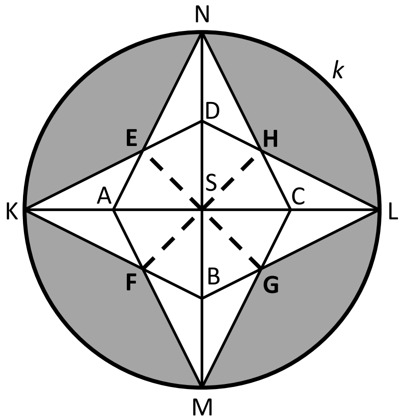
Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

31. ročník www.pikomat.sk školský rok 2013/2014

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Zlatý znak. *Opravoval Roman Kluvanec.*



Pri počítaní obsahu šedej časti bolo treba odrátať obsah bielej časti od obsahu kruhu. Označme si priesečníky úsečiek *KD* a *AN*, *KB* a *AM*, *LB* a *CM* a *LD* a *CN* postupne *E*, *F*, *G*, *H*. Po chvíli viac či menej náhodného čmárania nám isto odrazu napadne pospájať tieto 4 body so stredom *S* tak, ako to vidíme na obrázku prerušovanými čiarami.

Teraz sa pozrime na trojuholníky *KAE* a *ASE*: Strany *KA* a *AS* sú rovnako dlhé, pretože podľa zadania bod *A* delí úsečku *KS* na polovice. Okrem toho na tieto strany majú trojuholníky aj rovnakú výšku, pretože tá u oboch smeruje k spoločnému vrcholu *E*. No a keď majú dva trojuholníky rovnakú výšku na dve rovnako dlhé strany, znamená to, že musia mať aj rovnaký obsah.

Keďže celý útvar je taký pekne symetrický, je zrejmé, že toto bude platiť aj o všetkých ostatných trojuholníkoch tohto typu, a teda že všetky takéto malé trojuholníčky na obrázku budú mať rovnaký obsah. Ale aký je ten obsah presne? Pozrime sa napríklad na trojuholník *KSD*: Zo zadania ľahko vyčítame dĺžky jeho strán, a tak zrátame jeho obsah ako $(6{\cdot}3)/2 = 9\text{cm}^2$. Trojuholník *KSD* sa skladá z troch malých trojuholníčkov s rovnakým obsahom, a tak je nám jasné, že každý malý trojuholníček musí mať obsah $9/3 = 3\text{cm}^2$. Teraz už iba spočítame malé trojuholníčky a zistíme, že ich je dokopy 16. A máme vyhraté: **obsah bielej časti je** $16{\cdot}3 =$ $\mathbf{48cm^2}$.

Obsah kruhu je $\pi{\cdot}r^2 = \pi{\cdot}6^2 = 113{,}04\text{cm}^2$. Preto **obsah znaku bol** $113{,}04 - 48 =$ $\mathbf{65{,}04cm^2}$.

Bodovanie:
výpočet obsahu kruhu a správne odčítanie – 1b.;
ľubovoľný správny spôsob výpočtu obsahu bielej časti – 4b.

Úloha S2: Biliard. *Opravoval Pavol „Lietadlo" Koprda.*

Ronam mal piatich známych, z ktorých každý získal nejaký celočíselný počet bodov. Keď sme sčítali bodové zisky po dvoch (postupne každý s každým), tak sme dostali nasledovné súčty: 0, 1, 5, 5, 7, 9, 10, 11, 12 a 16. Našou úlohou je zistiť, koľko bodov získali jednotliví Ronamovi známi.

Ronamových známych si označíme písmenami *A*, *B*, *C*, *D* a *E*, pričom si povieme, že sú takto zoradení vzostupne podľa počtu bodov – takže *A* získal najmenej bodov, *B* viacej, *C* ešte viacej a tak ďalej, až *E* získal najviac bodov.

Je jasné, že keď sčítame dve najnižšie bodové hodnotenia, dostaneme najmenší zo všetkých súčtov. Najmenší súčet bol 0, a teda vieme povedať, že ***A*+*B* = 0**. Takisto sčítaním dvoch najvyšších bodových hodnotení musel vzniknúť najvyšší súčet. Najvyšším súčtom bolo 16, takže vieme, že ***D*+*E* = 16**.

Podobne vieme určiť aj dvojicu, ktorá vytvorila druhý najmenší súčet – musia to byť *A* a *C*. Prečo? Nuž najmenšou možnou kombináciou bolo *A*+*B*. Keď sa chceme od tejto presunúť k ďalšej väčšej, najmenšiu zmenu spôsobíme vtedy, ak iba *B* vymeníme za *C*. Druhým najmenším súčtom bolo 1, takže vieme, že ***A*+*C* = 1**. Takisto z opačnej strany prídeme na to, že ***C*+*E* = 12**.

Ale pozor, ďalej už tento systém nefunguje! Prečo? Lebo ďalej si už nemôžeme byť istí, ktorá dvojica bude tvoriť tretí najmenší (a ktorá tretí najväčší) súčet. Od *A*+*C* sa totiž vieme posunúť buď tak, že vymeníme *A* za *B* a vznikne *B*+*C*, alebo tak, že vymeníme *C* za *D* a vznikne *A*+*D*. No a my nevieme, ktorá z týchto zmien je menšia.

Teraz sa ešte raz zamyslime, ako vznikali súčty, ktoré sú vypísané v zadaní. Vznikali tak, že sme sčitovali jednotlivé bodové zisky – <u>každý s každým</u>. Keďže známych bolo 5, znamená to, že každý bodový zisk bol použitý 4-krát. To vlastne znamená, že keď sčítame všetky čísla zo zadania, je to to isté, ako keby sme každý bodový zisk Ronamových známych vynásobili štyrmi a potom to všetko spočítali dokopy. Takže

$$(4\cdot A)+(4\cdot B)+(4\cdot C)+(4\cdot D)+(4\cdot E) = 0+1+5+5+7+9+10+11+12+16 = 76.$$

Vidíme, že keď tento výsledok vydelíme 4, dostaneme súčet bodov všetkých piatich Ronamových známych: **A + B + C + D + E = 76/4 = 19**.

My však už z predošlých odsekov vieme, že *A*+*B*=0 a tiež že *D*+*E*=16. Keď toto nahradíme v predošlej rovnici, dostávame: 0 + ***C*** + 16 = 19. Hurá, prišli sme na bodový zisk prvého Ronamovho známeho: <u>***C* = 3**</u>.

Ďalej už to ide rýchlo, stačí si len spomenúť, na čo sme prišli v úvode riešenia: Kvôli *C*+*E*=12 je jasné, že <u>***E* = 9**</u>. Podobne kvôli *A*+*C*=1 je jasné, že <u>***A* = –2**</u>. Pokračujeme s *A*+*B*=0 a zisťujeme, že <u>***B* = 2**</u>. Nakoniec z *D*+*E*=16 plynie, že <u>***D* = 7**</u>.

Ronamovi známi získali: –2, 2, 3, 7 a 9 bodov. Keďže všetky naše kroky boli jednoznačné, tak je toto jediné riešenie.

<u>Bodovanie</u>:

správny výsledok – 2b.; postup – 2b.; dôkaz, že neexistujú ďalšie riešenia – 1b.; za nedostatočné vysvetlenia som strhával maximálne 1b.

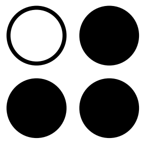
Úloha S3: Zamknuté dvere. *Opravoval Samuel „Samko“ Cibulka*.

V prvom rade si ujasnime, čo od nás zadanie chce. Máme otáčať mince tak, aby sme po určitom počte krokov už mali istotu, že budú všetky otočené rovnako. Preto nestačí žiadna stratégia, pri ktorej sa spoliehame, že skôr či neskôr „sa nám pošťastí“ a trafíme práve tú mincu, ktorú treba otočiť.

Najprv sa pozrime na to, ako môžeme nadvihovať klobúky. Na stolíku, ktorý nevieme, ako je otočený, máme vlastne iba dve možnosti: buď zodvihneme dva klobúky, ktoré sú pri sebe – odkryjeme stranu, alebo dva, ktoré sú oproti sebe – odkryjeme uhlopriečku.

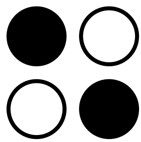
Hlavne musíme v každom kroku počítať s tým, že nevieme, na ktorú stranu alebo na ktorú uhlopriečku natrafíme, pretože stolík je pred každým naším ťahom náhodne zatočený. V tomto momente možno úloha vyzerá neriešiteľne, ale v skutočnosti sme si zjednodušili zadanie: naša stratégia musí byť taká, že bude fungovať pre ľubovoľnú zo štyroch strán a tiež pre ľubovoľnú z dvoch uhlopriečok. Tak už sa môžeme pustiť do otáčania mincí.

Na začiatok je dobré dostať stôl do stavu, kde budeme aspoň vedieť, ako sú mince navzájom usporiadané. To je pomerne jednoduché. Keď najprv ľubovoľnú stranu otočíme celú na čierno, a potom ešte ľubovoľnú uhlopriečku otočíme celú na čierno, môžeme si byť istí, že aspoň tri mince sú otočené na čierno. No a ak sa dvere neotvoria, je jasné, že štvrtá minca musí byť otočená na bielo – Obr. 1.

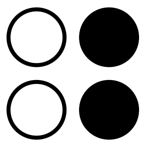


Obr. 1

Na takúto úlohu je dobré sa pozrieť aj odzadu, pretože tak nájdeme rozmiestnenia, ktoré sú pre nás dobré a chceme sa k nim dopracovať. Ako prvé teda hľadáme také rozmiestnenie, z ktorého sa budeme vedieť s istotou dostať do cieľa, teda do stavu, kedy budú všetky mince otočené na rovnakú farbu. Takýto stav je iba jeden, a to keď máme na jednej uhlopriečke čierne mince a na druhej uhlopriečke biele – Obr. 2. Vtedy ktorúkoľvek uhlopriečku odkryjeme, stačí jej zmeniť farbu a máme vyhraté. Našli sme teda predposledný stav. Teraz, z akého stavu sa vieme s istotou dostať do tohto predposledného? Na to potrebujeme mať jednu stranu (dve mince pri sebe) bielu a druhú čiernu. Keď vtedy odkryjeme stranu, môžu nastať dve situácie: Ak sme trafili dve rovnaké mince, tak im len zmeníme farbu a máme vyhraté. Ak sme trafili dve rôzne mince, tak tiež obom zmeníme farbu a dostávame sa do vyššie popísaného predposledného stavu. Našli sme teda pred-predposledný stav.



Obr. 2



Obr. 3

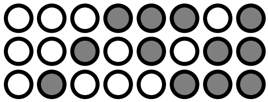
Teraz sa vráťme k tomu, čo sme už mali – tri čierne mince a jedna biela. Ak v tom stave odkryjeme uhlopriečku, budeme sa vedieť dostať do našich „dobrých“ stavov. Ak budú mince rôzne, tak iba otočíme bielu na čiernu a máme vyhraté. Ak budú obe mince čierne, tak jednu z nich (ľubovoľnú) otočíme na bielo a dostávame sa do pred-predposledného stavu.

Našli sme teda postup, ktorým sa vieme z ľubovoľného stavu nanajvýš na 5 krokov dostať do cieľa: 2 kroky na vytvorenie štartovného stavu, 3 kroky cez pred-predposledný, predposledný a do cieľa.

Bodovanie:
správny postup s odôvodnením, prečo naozaj funguje pre všetky situácie – 5b.; správny postup – 3,7b.; nesprávny postup, ktorý však obsahoval myšlienky správneho postupu – 1,5 až 4b.; za rôzne postupy, ktoré sa spoliehali na náhodu – do 1b.

Úloha S4: Posledná skúška. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

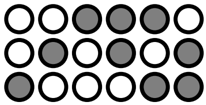
Máme guličky 2 farieb a ukladáme ich do mriežky s 3 riadkami. Chvíľu si ich môžeme ukladať len tak pre zábavu, aby sme si všimli, že máme pomerne málo možností, ako rozložiť 3 guličky do stĺpca. Tých možností je presne 8 a vidíme ich na Obr. 1. Sú tam 2 jednofarebné a 6 dvojfarebných možností.



Obr. 1

Takže pri vytváraní mriežky vlastne nutne používame v každom stĺpci niektorú z týchto 8 možností. Tiež si všimnime, že v každom stĺpci vždy sú aspoň dve guličky rovnakej farby. Kvôli tomu nemôžeme žiaden stĺpec použiť viac ako raz, pretože tieto dve guličky rovnakej farby keď sa zopakujú v dvoch stĺpcoch, vytvoria obdĺžnik alebo štvorec.

Teraz si všimneme, že dvojfarebné možnosti (to sú tie, v ktorých sa nachádzajú 2 guličky rovnakej farby a tretia opačnej farby) tvoria mriežku 3×6 bez toho, aby sa v nej nachádzal nejaký obdĺžnik či štvorec (Obr. 2). Problémové sú len jednofarebné možnosti. Napríklad trojica modrých guličiek vytvorí štvorec / obdĺžnik s každým stĺpcom, v ktorom sú 2 modré guličky. Takže ak by sme takúto jednofarebnú možnosť použili, podarí sa nám vyrobiť mriežku najviac 3×4.



Obr. 2

Správnym riešením je teda mriežka 3×6, napríklad ako na Obr. 2 (ale na poradí stĺpcov nezáleží). A prečo je to najlepšie možné riešenie? Prečo sa nedá vytvoriť mriežka 3×7? Lebo už nemáme inú možnosť stĺpca. Všetky dvojfarebné sme použili a jednofarebné sme vylúčili.

Bodovanie:
plný počet bodov za správne riešenie N=6 a postup, ktorý vysvetľuje, prečo je 6 najväčšie možné riešenie a prečo by iné usporiadanie nebolo lepšie. Za nedostatky pri objasňovaní týchto „prečo-otázok“ sa dalo prísť o 1 až 2 body.

Úloha S5: Misie. *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula.*

V zadaní sa píše, že každý generál zadal toľko ľahkých misií, koľko zadali ostatní generáli dokopy stredných a toľko stredných, koľko ostatní dokopy ťažkých. To však neznamená, že všetci museli zadať rovnaký počet ťažkých, stredných či ľahkých misií. Rovnako zadanie nevylučuje, že by niektorý generál misie niektorej obtiažnosti nezadal vôbec.

V prvom rade si treba uvedomiť, že počet ľahkých misií úplne presne vychádza z počtu stredných a že počet stredných misií úplne presne vychádza z počtu ťažkých. To vlastne znamená, že VŠETKY stredné aj ľahké misie sa iba odvíjajú od nejakých ťažkých. Najľahšie to pochopíme, keď sa pozrieme na čo najjednoduchší prípad: čo ak iba jeden generál zadal iba jednu jedinú ťažkú misiu?

V tabuľke si ľahko znázorníme, ako by to dopadlo. Dodržiavajúc pravidlá zo zadania najprv vyplníme riadok so strednými misiami, a potom riadok s ľahkými misiami. Výsledok je jasný: jedna jediná ťažká misia spôsobila, že bolo zadaných ďalších 5 stredných, a to spôsobilo, že bolo zadaných ďalších 25 ľahkých misií. Z toho vieme vyčítať zaujímavý poznatok: **na každú ťažkú misiu sa nevyhnutne viaže ďalších 30 stredných a ľahkých misií**.

Tým pádom je úloha vlastne vyriešená. Ukázali sme, že misie sa môžu vyskytovať len „v balíčkoch" po 31 kusov. Ak pridáme nejakú ťažkú, pribudne hneď aj 30 ďalších. Ak by sme chceli „len tak" pridať nejakú strednú alebo ľahkú, porušili by sme stanovené pravidlá, takže to nejde. Z toho je jasné, že **počet všetkých misií určite je deliteľný číslom 31.**

Generáli	G1	G2	G3	G4	G5	G6	Spolu:
Ťažké misie	0	0	0	1	0	0	1
Stredné m.	1	1	1	0	1	1	5
Ľahké m.	4	4	4	5	4	4	25

Bodovanie:
každý správny dôkaz – 5b., bolo však veľmi dôležité vysvetliť svoj postup, prečo jednotlivé súvislosti v ňom platia; riešenie úlohy za predpokladu, že všetci generáli zadávali rovnaký počet misií – maximálne 3b.

p-mat

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat