Vzorové riešenia 2. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Čaj. *Opravovala Michaela „Miški“ Zatrochová.*

Existuje niekoľko spôsobov, ako sa dostať k správnemu výsledku. Tu si ukážeme ten, pri ktorom sa nezapotíme so „škaredými“ desatinnými číslami. Pôjdeme na to od konca.

Vieme, že na konci bol v každom hrnčeku 1 dl čaju. Pri poslednom prelievaní pán Oleg z tretieho hrnčeka odlial po 1/5 do prvého a druhého hrnčeka. Teda v treťom hrnčeku ostali 3/5 predošlého obsahu. A my vieme, že to bol presne 1 dl. Takže koľko čaju vlastne odlieval? Ak 3/5 predošlého obsahu = 1 dl, tak potom 1/5 predošlého obsahu = 1/3 dl. **Pán Oleg pri treťom prelievaní odlieval 1/3 dl.** Z toho je jasné, že situácia **pred** tretím prelievaním vyzerala nasledovne:

1. hrnček .... 1 dl – 1/3 dl = 2/3 dl;
2. hrnček .... 1 dl – 1/3 dl = 2/3 dl;
3. hrnček .... 1 dl + 2/3 dl = 5/3 dl.

Pokračujeme ďalej. Pri druhom prelievaní pán Oleg z prvého hrnčeka odlial po 1/4 do druhého a tretieho hrnčeka. Teda v prvom hrnčeku ostali 2/4, čiže polovica predošlého obsahu. A my už (z predošlého odseku) vieme, že to boli presne 2/3 dl. Takže koľko vlastne odlieval? Ak polovica predošlého obsahu = 2/3 dl, tak potom 1/4 predošlého obsahu = 1/3 dl. **Pán Oleg aj pri druhom prelievaní odlieval 1/3 dl.** Z toho je jasné, že situácia **pred** druhým prelievaním vyzerala takto:

1. hrnček .... 2/3 dl + 2/3 dl = 4/3 dl;
2. hrnček .... 2/3 dl – 1/3 dl = 1/3 dl;
3. hrnček .... 5/3 dl – 1/3 dl = 4/3 dl.

Pri prvom prelievaní pán Oleg z druhého hrnčeka odlial po 1/3 do prvého a tretieho hrnčeka. Teda v druhom hrnčeku zostala 1/3 predošlého obsahu. A my už (z predošlého odseku) vieme, že to bola presne 1/3 dl. **Pán Oleg aj pri prvom prelievaní odlieval 1/3 dl.** Z toho je jasné, že situácia **pred** prvým prelievaním vyzerala takto:

1. hrnček .... 4/3 dl – 1/3 dl = 1 dl;
2. hrnček .... 1/3 dl + 2/3 dl = 1 dl;
3. hrnček .... 4/3 dl – 1/3 dl = 1 dl.

Pán Oleg pôvodne nalial do každého hrnčeka 1 dl čaju.

Bodovanie:

správny výsledok – 1b.; správny postup – 2b.; odôvodnenie – 2b.

Úloha S2: Elixíry. *Opravovala Mária „Marry“ Šormanová.*

Predstavme si, že varíme elixíry v dvoch hrncoch naraz a riadime sa takýmto pravidlom: vždy, keď do jedného hrnca dáme akúkoľvek kombináciu byliniek, tak potom do druhého hrnca dáme úplne všetky ostatné bylinky, ktoré sme nepoužili v prvom hrnci. Dva elixíry, ktoré takto vzniknú, nazveme ***dvojica***.

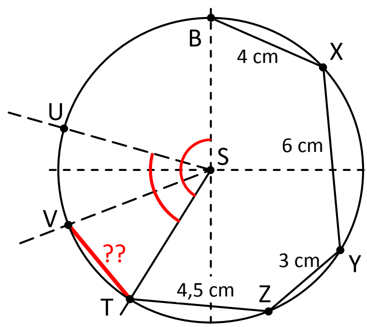
Z tohto je jasné, že **ku každému elixíru vieme nájsť presne jednu *dvojicu*** – jednoducho zoberieme všetky tie bylinky, ktoré zostali nepoužité. Jedinou výnimkou je elixír z úplne všetkých byliniek, pretože jeho *dvojica* by bol „elixír zo žiadnych byliniek“. Ale elixír bez byliniek nie je elixír.

Keďže na výrobu jednej *dvojice* sú vždy použité úplne všetky bylinky, tak je tiež jasné, že **v každej *dvojici* bude vždy jeden elixír obsahovať hľuzovnicu mozgožravú a ten druhý nie**. Takže pokiaľ ide o *dvojice*, tak elixírov s hľuzovnicou je rovnako veľa ako elixírov bez nej (lebo sú popárované vo dvojiciach). No a okrem *dvojíc* už máme len ten jediný nepopárovaný elixír, ktorý sa skladá z úplne všetkých byliniek, a tým pádom obsahuje aj hľuzovnicu mozgožravú. **Elixírov, ktoré obsahovali hľuzovnicu mozgožravú, bolo (o jeden) viac ako tých, ktoré ju neobsahovali.**

Bodovanie:
drobné nedostatky – 4 až 4,75b.; nezdôvodnené závažnejšie kroky – 3b.; riešenie na základe nesprávne pochopeného zadania alebo pozorovania iba zopár prípadov bez dôkazu – 2b.; nesprávne riešenia s dobrými čiastočnými úvahami – 0 až 1b.

Úloha S3: Kruhová záhrada. *Opravovala Kristína „Krisa“ Faguľová.*

Najprv si premeníme metre na centimetre a použijeme zadanú mierku. Teda v našom nákrese polomer kruhu je 5 cm, $|AB| = 4$ cm, $|CD| = 6$ cm, $|EF| = 3$ cm, $|GH| = 4{,}5$ cm. Potrebujeme zistiť dĺžku strán *BC*, *DE*, *FG*, *HA*, pričom vieme, že majú rovnakú dĺžku. Pomocou kružidla narysujeme kružnicu s polomerom 5 cm (to je naša záhrada). Poradie stavieb preusporiadame a najprv zostavíme tie, ktorých vzdialenosti poznáme. Zostrojíme teda bod *B* na kružnici; potom bod *X*, pričom $|BX| = 4$ cm; bod *Y* tak, že $|XY| = 6$ cm; bod *Z*, pričom $|YZ| = 3$ cm a nakoniec *T* tak, že $|ZT| = 4{,}5$ cm. Zostal nám kruhový výsek *TSB*, ktorý potrebujeme rozdeliť na 4 rovnaké časti (reprezentujúce 4 strany so zatiaľ neznámou dĺžkou). Na to využijeme vlastnosť osi uhla, ktorá delí uhol na dve zhodné časti. Najprv zostrojíme pomocou kružidla os uhla *TSB*. Na mieste, kde pretne kružnicu, je bod *U*. Zostrojíme os uhla *TSU*, pričom bod, v ktorom pretne kružnicu, nazveme *V*. Dĺžka $|VT|$ je hľadanou dĺžkou. Teraz dokážeme narysovať plán tejto záhrady, nakoľko poznáme všetky vzdialenosti.



Bodovanie:
všetky strhnutia bodov sú odôvodnené priamo v riešení.

Úloha S4: Papagájova hádanka. *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula.*

Klára na základe svojho čísla a celkového súčtu 14 vie, že Tim a pán Oleg majú rozdielne čísla. Takúto istotu môže mať len vtedy, ak jej číslu do 14 chýba nejaká nepárna hodnota, pretože iba nepárna hodnota sa musí nevyhnutne skladať z dvoch rôznych čísel. To znamená, že **Klára má nepárne číslo**.

Pán Oleg vedel, že všetci majú rozdielne čísla ešte predtým, ako Klára prehovorila. Z toho v prvom rade vieme, že aj **pán Oleg má nepárne číslo** – z rovnakého dôvodu ako Klára. A keďže aj on aj Klára majú nepárne čísla, **Tim musí mať párne číslo** (aby celkový súčet mohol byť párny = 14). Lenže pán Oleg vedel ešte aj to, že nikto nemá také číslo, ako on. Ako si tým môže byť istý? Nuž musí mať také vysoké číslo, že ak by niekto mal rovnaké, tak by bol presiahnutý celkový súčet 14. Tu sa nám však úloha rozdeľuje na dve varianty:

1) Nulu považujeme za prirodzené číslo

Keby mal Oleg číslo 7 (polovica zo súčtu 14), tak by deti ešte stále mohli mať čísla 7 a 0. Lenže Oleg si bol istý, že čísla sú všetky rôzne. Takže Oleg musí mať číslo ešte väčšie ako 7. Nepárne čísla medzi 7 a 14 teda **prichádzajú do úvahy: 9, 11, 13**.

Tu bolo veľmi dôležité zamyslieť sa nad tým, čo povedal Oleg potom. Povedal, že stále nevie, kto má aké číslo. Keby však mal Oleg číslo 13, tak by predsa presne vedel, že do súčtu 14 chýba už len 1 a 0. Tieto by museli mať: Klára 1 (nepárne) a Tim 0 (párne); a bolo by vymaľované. Z toho vyplýva, že **Oleg nemôže mať číslo 13**.

Keby mal Oleg číslo 11, tak Klára a Tim môžu mať čísla 1+2 alebo 3+0. Keby mal Oleg číslo 9, tak Klára a Tim môžu mať čísla 1+4, 3+2, alebo 5+0 (vždy Klára to nepárne a Tim to párne). Tu už to pán Oleg skutočne nevie s istotou určiť.

Zato Tim už v tejto situácii čísla určiť vedel! Čo z toho vyplýva? Keby mal Tim číslo 0, tak si nie je istý, pretože v tomto prípade môže mať Oleg aj 11 (Klára by mala 3), aj 9 (Klára by mala 5). Keby mal Tim číslo 2, je to skoro to isté: Oleg ešte stále môže mať aj 9 (a Klára 3), aj 11 (a Klára 1). Ostala nám posledná možnosť, že Tim má číslo 4. Teraz už pán Oleg nemôže mať 11, lebo by nesedel celkový súčet. Teda **Tim má číslo 4, Oleg musí mať číslo 9 a Klára číslo 1**.

2) Nulu nepovažujeme za prirodzené číslo

Jediným rozdielom oproti predošlému prípadu je, že možnosti pre pána Olega teraz už nie sú 9, 11, 13, ale sú to 7, 9, 11 (pripomeň si dôvod, prečo sme v predošlom prípade vylúčili 7). Číslo 13 vypadlo preto, lebo kvôli zakázanej nule by bol presiahnutý celkový súčet 14. Ďalej už iba rovnakým postupom ako v predošlom prípade dospejeme k výsledku, že **Tim má číslo 6, pán Oleg má číslo 7 a Klára má číslo 1**.

Bodovanie:
určenie parity každého čísla – 1b.; určenie možného rozmedzia čísla pána Olega – 2 × 1b. (0,5b. za dolné a 0,5b. za horné ohraničenie); určenie správnych čísel – 2 × 1b.

Úloha S5: Poznávacie značky. *Opravoval Samuel „Samko“ Cibulka.*

Hľadáme počet šesťciferných čísel, ktorých súčin cifier je rovný 750. Najprv preskúmajme, aké cifry vôbec môžeme použiť, potom sa budeme zaoberať ich usporiadaním. Prvočíselný rozklad tohto čísla je: $750 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

Tieto činitele teda môžu byť cifry nášho čísla, pričom ešte doplníme jednotky (lebo tie ciferný súčin nezmenia), aby sme mali 6 cifier. Takže **jedna možná šestica cifier so súčinom 750 je: 1, 2, 3, 5, 5, 5.** To ale nie je jediná možnosť. Môžeme totiž zobrať niektoré dva činitele a nahradiť ich ich súčinom. Napríklad $2 \cdot 3 = 6$, a teda $750 = 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Aj tieto činitele môžu byť cifry nášho čísla. Ešte pridáme dve jednotky a **máme druhú možnú šesticu so súčinom 750: 1, 1, 5, 5, 5, 6.**

Všimnime si ale, že žiadne dva iné činitele nemôžeme nahradiť, pretože ich súčin by bol väčší ako 9, takže by nemohol byť samostatnou cifrou. Ostávajú nám teda iba dve možné sady cifier.

Teraz musíme už len spočítať, koľko čísel vieme z každej sady cifier vytvoriť. Keby sme mali spočítať počet čísel, ktoré sa skladajú z cifier 1, 2, 3, 4, 5, 6, bolo by to $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$. Na miesto prvej cifry by sme totiž mohli vyberať zo šiestich možných cifier, potom na miesto druhej z piatich a tak ďalej. Takéto výpočty sa používajú v matematike často, vzniklo pre ne označenie *faktoriál* a zapisuje sa pomocou výkričníka: $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot n$ (čítaj „en faktoriál“). Teda napríklad $6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$.

Teraz sa poďme pozrieť na rozdiel medzi týmito číslami a našou prvou skupinou. Namiesto cifier 4, 5, 6 tam máme cifry 5, 5, 5. Na poradí týchto troch pätiek nám nezáleží (je jedno, ktorá bude prvá). Zato cifry 4, 5 a 6 vieme usporiadať 3! spôsobmi. Preto počet čísel v prvej skupine 1, 2, 3, 5, 5, 5 bude iba $6!/3! = 4\cdot5\cdot6 = 120$.

Podobne vieme spočítať počet čísel aj pre druhú skupinu – tam máme namiesto cifier 1, 2 (vieme usporiadať 2! spôsobmi) cifry 1, 1 a namiesto cifier 3, 4, 5 (vieme usporiadať 3! spôsobmi) cifry 5, 5, 5. Preto máme v druhej skupine $6!/(2!\cdot3!) = 2\cdot5\cdot6 = 60$ čísel. Dokopy v prvej a druhej skupine je teda 180 čísel, a to je počet všetkých poznávacích značiek.

Bodovanie:

nájdenie číslic, ktoré prichádzajú do úvahy – 2b.; zrátanie počtu čísel, ktoré sa dajú vytvoriť – 3b.; ak ste zabudli na druhú skupinu čísel – max 3b.

p-mat

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat