Vzorové riešenia 3. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Človeče, nehnevaj sa. *Opravoval Pavol „Lietadlo“ Koprda.*

V prvom rade si treba poriadne uvedomiť, že v tejto úlohe *nevieme ovplyvniť* začiatočné rozloženie figúrok a *nevieme ovplyvniť*, aké číslo padne na kocke. A napriek tomu chceme *mať istotu*, že sa Kláre podarí nejakú figúrku vyhodiť. Preto hľadáme taký (najmenší možný) počet figúrok, aby sa **pri <u>každom</u> ich rozložení a pri <u>každom</u> čísle na kocke** vždy dala nejaká figúrka vyhodiť. Dohodnime sa, že figúrky, ktoré sú schopné nejakú inú vyhodiť, budeme nazývať „*nebezpečné*“. Takže inými slovami našou snahou je, aby sa v každej situácii vždy vyskytovala aspoň jedna *nebezpečná* figúrka.

Začneme od konca a najprv celý plánik zaplníme figúrkami, čiže ich postavíme 36. Tu je to jednoduché. Všetkých 36 figúrok je *nebezpečných*, lebo každá môže nejakú inú vyhodiť.

Čo sa stane, keď jednu figúrku odoberieme? Za prvé sme priamo odstránili jednu *nebezpečnú* figúrku. Za druhé v plániku pribudlo prázdne políčko. A prázdne políčko znamená, že (po hode kockou) ešte jedna z figúrok prestane byť *nebezpečnou*, pretože bude „ohrozovať“ práve toto prázdne políčko. Takže si všimnime, že **odobratím <u>jednej</u> figúrky môžeme stratiť až <u>dve</u> *nebezpečné* figúrky** – jednu priamo odstránime a jedna síce ostane na plániku, ale prestane byť *nebezpečnou*, lebo sme jej odstránili figúrku na vyhodenie.

Ukážme si to na príklade. Povedzme, že z plného plánika sme odobrali 10 figúrok, takže teraz na ňom máme 26 figúrok a 10 prázdnych políčok. Pri určitom rozložení figúrok a určitom hode kockou sa v pohode môže stať, že niektorých 10 figúrok bude ohrozovať presne týchto 10 prázdnych políčok. A to samozrejme znamená, že týchto 10 figúrok už nie je *nebezpečných*. Na plániku nám teda ostalo 26 – 10 = 16 *nebezpečných* figúrok. Opäť vidíme, že v porovnaní so začiatočným plným plánikom (36 figúrok) po odobratí 10 figúrok klesol počet *nebezpečných* figúrok o 20 (z 36 na 16). A toto je vlastne všetko, na čo treba pamätať: že **každé <u>jedno prázdne políčko</u> môže najviac <u>jednej figúrke</u> spôsobiť, že prestane byť *nebezpečnou***. Inými slovami: **Koľko je na plániku prázdnych políčok, tak najviac toľko figúrok môže prestať byť *nebezpečnými***.

My si chceme za každých okolností na plániku zachovať aspoň jednu *nebezpečnú* figúrku, pričom na začiatku ich máme 36. Z toho už ľahko vyvodíme, že si môžeme na plániku dovoliť maximálne 17 prázdnych políčok. Vtedy tam bude 19 figúrok a aj v najhoršom prípade (pri nejakom rozložení a nejakom hode kockou) môže najviac 17 z nich ohrozovať tých 17 prázdnych políčok. Stále však aspoň dve figúrky ostanú *nebezpečné*.

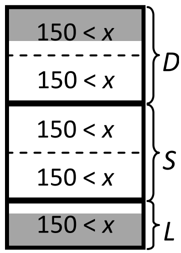
Ak sa pokúsime počet figúrok ešte znížiť, budeme mať na plániku 18 figúrok a 18 prázdnych políčok. Tu sa už ale môže stať, že každá figúrka bude ohrozovať prázdne políčko, a teda žiadna nebude schopná nejakú inú vyhodiť. Ako dôkaz uveďme jednu takú konkrétnu situáciu: napríklad sa môže stať, že figúrky budú rozložené striedavo *voľné políčko – figúrka – voľné políčko – figúrka – voľné políčko – atď.* a na kocke padne jednotka. Je jasné, že sa nedá žiadnu figúrku vyhodiť.

Ukázali sme, že pri 19 figúrkach sa určite podarí nejakú vyhodiť a ukázali sme, že pri 18 figúrkach sa môže stať, že sa nepodarí žiadnu figúrku vyhodiť. **Klára si na začiatku hry musela zobrať najmenej 19 figúrok.**

Bodovanie:
výsledok – 1b.; dôkaz, že 19 figúrok stačí – 2,5b.; dôkaz, že 18 figúrok nestačí – 1,5b.;

Úloha S2: Divadlo. *Opravoval Samuel „Samko“ Cibulka.*

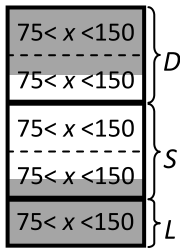
Našou úlohou je určiť počet miest v sále. Jednoduchšie sa nám však bude počítať, keď budeme rátať s pätinou miest v sále, pretože nám nebudú vychádzať zlomky (sála je rozdelená na pätiny podľa kategórií). Pätinu počtu miest v sále označme x. Kategórie odpredu dozadu označme ako *Drahá* (D), *Stredná* (S) a *Lacná* (L).



Obr. 1

Zatiaľ ešte nevieme, aké veľká sála je, a tak nevieme, do koľkých kategórií bude zasahovať 150 miest odrátaných odpredu alebo odzadu. Tu musíme rozobrať jednotlivé prípady.

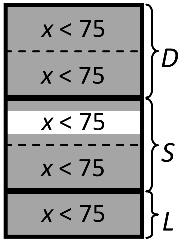
1. Ak je $x > 150$. Túto situáciu vidíme na Obr. 1. Všetky miesta rozdané odpredu sa zmestia do *Drahej* kategórie a všetky miesta rozdané odzadu sa zmestia do *Lacnej* kategórie. Cenový rozdiel medzi týmito kategóriami je 11 € – 9 € = 2 €. To by ale znamenalo, že rozdiel v tržbe musel byť $150 \cdot 2$ € = 300 €. To je jasne v rozpore so zadaním, takže táto možnosť zjavne nie je správna.



Obr. 2

2. Ak je $75 < x < 150$. Túto situáciu vidíme na Obr. 2. Všetky miesta rozdané odpredu sa zmestia do *Drahej* kategórie, avšak smerom odzadu sa zaplnila celá *Lacná* kategória a niektoré miesta zasahujú až do *Strednej*. Na vstupenke, ktorú presúvame z *Drahej* do *Lacnej* kategórie, ušetríme 2 €. Počet týchto vstupeniek bude presne x, pretože celá kategória L je zaplnená, a tak na nich ušetríme ($2x$) €. Zvyšné vstupenky, ktorých počet je tým pádom ($150 - x$), presúvame z *Drahej* do *Strednej* kategórie, a tak na každej ušetríme 1 €, spolu teda ($150 - x$) €. No a celá ušetrená suma má byť 216 €, čiže: $2x + (150 - x) = 216$. Z toho ľahko dopočítame, že $\mathbf{x = 66}$. Ale pozor! Počas celého tohto výpočtu sme predsa predpokladali, že $75 < x < 150$. Takže ani táto možnosť nemôže byť správnym riešením.

3. Ak je x < 75. Túto situáciu vidíme na Obr. 3. Aj odpredu aj odzadu niektoré miesta zasahujú do *Strednej* kategórie, no odpredu je ich iný počet ako odzadu. Z obrázku vidíme, že presne *x* miest presúvame z *Drahej* do *Lacnej* kategórie (ušetríme po 2 €) a ďalších presne *x* miest presúvame z *Drahej* do *Strednej* kategórie (ušetríme po 1 €). Zvyšné miesta presúvame „zo *Strednej* do *Strednej* kategórie“, takže tými sa nemusíme zaoberať. Podobne ako v predošlom prípade si vyjadríme rozdiel v tržbe ako: $2x + x = 216$. Dopočítame, že ***x* = 72** a hurá, sedí to aj s naším predpokladom, že $x < 75$. **V sále bolo 5 · 72 = 360 miest.**



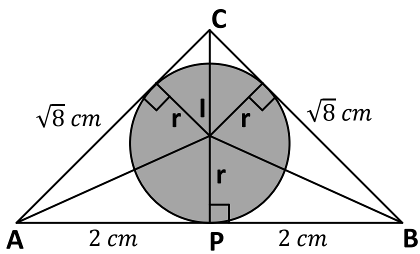
Obr. 3

Mohli by sme ešte rovnako vypočítať prípad, kedy miesta aj odpredu aj odzadu zasahujú do všetkých kategórií, radšej si však poďme zdôvodniť, prečo to už nie je potrebné. Je jasné, že *x* by muselo byť ešte menšie ako doteraz. Lenže tým, že zmenšíme *x*, sa nám nikdy nemôže stať, že ušetríme viac. Budeme práveže šetriť čím ďalej, tým menej. Medzi 150 zadných budú totiž pribúdať drahé predné vstupenky a zas medzi 150 predných budú pribúdať lacné zadné. Ušetrená suma sa preto bude s klesajúcou hodnotou *x* ďalej už len znižovať. Preto je 360 naozaj jediným riešením.

Bodovanie:
správne riešenie – 2b.; rozdelenie úlohy na rôzne prípady podľa počtu sedadiel – 1,5b.; vylúčenie všetkých ostatných možností – 1,5b.;

Úloha S3: Vzor na krabičke. *Opravoval Roman Kluvanec.*

Najprv si doplňme aj druhú polovicu kruhu a trojuholníka. Teraz sa môžeme na kruh pozerať ako na kružnicu vpísanú do trojuholníka. Potom si môžeme dokresliť polomery *r* vpísanej kružnice. Pomocou Pytagorovej vety si vypočítame veľkosť strany $|BC| = \sqrt{8}\,cm$. Okrem toho vieme ľahko vypočítať obsah trojuholníka *ABC* ako $S = \frac{|AB|\cdot|PC|}{2} = \frac{4\cdot 2}{2} = 4\,cm^2$. Tento istý obsah môžeme tiež vyjadriť ako súčet obsahov malých trojuholníkov *ABI*, *BCI* a *ACI*. Všetky tieto tri malé trojuholníky majú výšku *r*. Takže $S = \frac{|AB|\cdot r}{2} + \frac{|AC|\cdot r}{2} + \frac{|BC|\cdot r}{2}$. Keď zlomky spojíme a *r* vyberieme dopredu, dostávame $S = r \cdot \frac{|AB|+|AC|+|BC|}{2}$. V čitateli zlomku vidíme vlastne obvod trojuholníka, takže to isté môžeme zapísať ako $S = r \cdot \frac{o}{2}$. Z toho už ľahko vyjadríme $r = \frac{2S}{o} = \frac{2\cdot 4}{4+2\cdot\sqrt{8}} = 0{,}83\,cm$.



Polomer vpísaného polkruhu je 0,83 cm.

Úloha S4: Hovoriaca krabička. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Výsledný súčet je –100 bez ohľadu na to, či zarátame alebo nezarátame súčet myslených čísel. Z toho vyplýva, že súčet myslených čísel musí byť 0. Zo zadania vieme, že sú to rôzne čísla, takže to nemôžu byť dve nuly. Aby sme dostali súčet 0, neostáva nič iné, než že jedno z nich je kladné a druhé je rovnako veľké, ale záporné. Označme si ich preto x a $-x$. Ihneď si všimneme, že podiel týchto čísel je -1 a ich súčin je $-x \cdot x$, označované tiež ako $-x^2$. S rozdielom je to o niečo komplikovanejšie, lebo ten môže byť buď $(-x) - x = -2x$, alebo $x - (-x) = 2x$. Sčítajme to všetko dohromady a uvidíme, čo z toho vznikne.

Prvá možnosť je $-x^2 - 2x - 1 = -100$. Druhá možnosť je $-x^2 + 2x - 1 = -100$. Dostali sme niečo, čomu sa hovorí kvadratická rovnica. To je rovnica, ktorá obsahuje x^2. Niektorí ste sa s nimi už stretli a možno ich aj viete vyriešiť pomocou špeciálneho vzorca. My sa však o to pokúsime pomocou bežného uvažovania.

Vezmime si prvú rovnicu a rovno si ju upravme do použiteľnejšej podoby, aby boli x-ká na jednej strane a čísla na opačnej strane. Najprv sa však zbavíme mínusov.

$$\begin{aligned}
-x^2 - 2x - 1 &= -100 && \text{// prenásobíme } -1\\
x^2 + 2x + 1 &= 100 && \text{// odčítame 1}\\
x^2 + 2x &= 99 && \text{// vyjmeme } x \text{ pred zátvorku}\\
x \cdot (x+2) &= 99
\end{aligned}$$

Dostali sme sa ku súčinu 2 celých čísel (spomeňme si, že x je celé, takže aj $x+2$ musí byť celé). Aké to len môžu byť čísla? No predsa také, aby v súčine dali 99, takže x a $x+2$ sú delitele 99. Kto vie, aké sú všetky možné delitele 99? Sú to 1, 3, 9, 11, 33, 99. Takže x a $x+2$ sú niektoré dva z týchto deliteľov. Okrem toho vieme, že medzi nimi musí byť rozdiel 2, lebo aj medzi číslami x a $x+2$ je rozdiel 2. Môžu to byť 1 a 3? Nie, ich súčin nie je 99. Môžu to byť 9 a 11? Áno. Iná možnosť už neostala, a tak by sa zdalo, že $\boldsymbol{x = 9}$ je jediným riešením prvej rovnice. **Krabička si mohla myslieť čísla 9 a –9.**

Ale počkať, počkať... Na niečo sme predsa len zabudli! Súčin 99 sa dá vytvoriť aj z dvoch záporných čísel. Delitele budú tie isté ako doteraz, len s mínusovými znamienkami. Opäť hľadáme také, ktorých rozdiel je 2, a nachádzame –9 a –11. Ale pozor, x je v tomto prípade –11, lebo –9 je $x+2$. Takže sme našli aj druhé riešenie tej istej rovnice, a to $\boldsymbol{x = -11}$. **Krabička si mohla myslieť aj čísla –11 a 11.**

Prvú rovnicu sme načisto rozobrali a vyriešili. Keby sme sa pustili do tej druhej veľmi podobným spôsobom, našli by sme riešenia $x = -9$ a $x = 11$, čo by nás doviedlo k už objaveným možnostiam myslených čísel. Je to náhoda, alebo to tak malo byť, že z druhej rovnice, ktorá vznikla prehodením poradia odčítania, sme sa už nedozvedeli nič nové? Otázka ostáva pre Vás na zamyslenie.

Bodovanie:

V postupe ste museli prísť na to, že súčet je 0, podiel je –1, súčin je niečo ako $-x^2$ a rozdiel je buď $-2x$, alebo $2x$. Následne bolo treba tieto vedomosti dotiahnuť až ku 2 správnym riešeniam. Vzniknuté kvadratické rovnice ste mohli riešiť akokoľvek, ale bolo treba dať pozor na to, že majú vždy 2 riešenia. Kto skúšal postupne dosadzovať čísla do rovnice, musel vysvetliť, prečo to pre vyššie čísla nemá zmysel. Celkovo sa za postup dali získať 3 body a za chýbajúce drobnosti (napr. že rozdiel sa dá spraviť dvoma rôznymi spôsobmi) som strhával po 0,5 boda. Za výsledky sa dali získať zvyšné 2 body, takže kto prišiel len na jedno riešenie, alebo nepreskúmal niektorú možnosť, stratil 1 bod.

Úloha S5: Oslava narodenín. *Opravovali Lenka Bendová a Michal Kesely.*

V prvom rade si treba uvedomiť, čo nám hovorí zadanie. Keď spočítame, koľko rodina spálila z každej sviečky, zistíme, že zo všetkých sviečok dokopy ubudlo 18 mm. Keďže každá cifra od 0 po 9 sa v balíku sviečok nachádza len raz, tak nikto nemohol oslavovať narodeniny s rovnakými ciframi (t.j. 11, 22, 33, ...99). Tiež vieme, že balík rodina kúpila pred 3 rokmi, čo znamená, že odvtedy oslavovali 9 narodenín (3 členovia krát 3 roky).

Predpokladajme, že nikto z rodiny nemal viac ako 100 rokov. To pre nás znamená, že všetky narodeninové hodnoty boli dvojciferné čísla (18 mm deleno 9 narodenín). Keďže sviečka „9“ ani sviečka „0“ neboli použité ani raz, znamená to, že žiaden vek nemohol prejsť cez desiatky. Takže cifra na mieste desiatok sa u žiadneho člena rodiny nemení.

„1“ bola použitá trikrát a keďže jej „okolité“ cifry „0“ ani „2“ použité neboli, musela byť na mieste desiatok – u Filipa.

„3“ bola použitá sedemkrát. Na mieste jednotiek byť nemohla, lebo v takom prípade by sa u každého člena rodiny mohla vyskytnúť len raz, teda dokopy trikrát. Musela teda byť na mieste desiatok u dvoch členov (6-krát). Jedno použitie stále ostáva, takže „3“ musela byť jedenkrát na mieste jednotiek u Filipa – keď oslavoval 13 rokov.

„5“ bola použitá trikrát a keďže miesta desiatok už sú obsadené, musela byť na mieste jednotiek – u každého člena rodiny raz. Takže Filip musel niekedy oslavovať aj 15 rokov. Tým pádom je už jasné, že Filip oslavoval 13., 14. a 15. narodeniny. Už tu by sme mohli povedať, že vieme odpoveď, ale musíme ešte overiť, či sedia ostatné veky a sviečky a teda či úloha vôbec má riešenie.

„4“ bola použitá dvakrát, raz u Filipa a raz u niekoho iného. Takže jeden z rodičov mal 34 rokov. A keďže nemohol mať 33, musel oslavovať 34., 35. a 36. narodeniny.

„6“ bola použitá dvakrát, takže aj druhý rodič mal 36. narodeniny. Podľa zvyšných sviečok musel mať 35., 36. a 37. narodeniny, čo súhlasí s použitím „7“ jedenkrát. Všetko nám pekne vyšlo a my môžeme spokojne prehlásiť, že **Filip dnes oslavuje 16. narodeniny.**

Bodovanie:
správne riešenie s kompletne popísaným postupom – 5b.; nedotiahnuté riešenie (napríklad nevylúčenie možnosti „33“ rokov) s kompletne popísaným postupom – 3,5b.; nedotiahnuté riešenie alebo neúplný postup – 2 až 3b.

p-mat

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat