Vzorové riešenia 1. série zimnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Volejbalová súťaž. *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula.*

Na úvod je dôležité si uvedomiť, že ak Ennin tím v žiadnom prípade nemohol odohrať 6 zápasov, tak to vlastne znamená, že **žiaden tím nemohol odohrať 6 zápasov**, pretože ten tím, ktorý by ich odohral, mohol byť Ennin.

Zo zadania vieme, že každá skupina má 4 tímy a v rámci skupiny hrá každý s každým. Teda po skončení skupinovej fázy bude mať každý tím odohraté presne 3 zápasy. Sú dva spôsoby, ako môžeme docieliť, aby žiaden tím neodohral presne šesť zápasov: buď spravíme turnaj jednoducho „prikrátky“, teda že najväčší možný počet odohratých zápasov za celý turnaj bude menší ako 6; alebo nejako zariadime, aby šiesty zápas vyšiel určite na semifinále. Semifinále je totiž jediný zápas v druhej fáze turnaja, po ktorom tím určite musí hrať ešte jeden zápas (buď finále, alebo súboj o tretie miesto), a to nezávisle od toho, či ten tím v semifinále vyhral alebo prehral.

Rozoberme si teda prvú možnosť. Počet zápasov je najmenší vtedy, keď je – samozrejme – v turnaji najmenej tímov. Podľa zadania Enna vedela, že na turnaji boli aspoň dve skupiny. Takže najmenší možný počet tímov je 8. V takom prípade zo skupinovej fázy postúpia 4 tímy (2 z každej skupiny) a nasleduje rovno semifinále a potom finále/zápas o 3. miesto. To znamená maximálny počet zápasov 5: tri zápasy v skupine, a potom semifinále a finále. Teda v tomto prípade nemohol žiaden tím odohrať 6 zápasov.

Akonáhle by sme ale do turnaja pridali čo i len jednu skupinu (4 tímy), tak do vyraďovacej fázy už postúpi 6 tímov, a teda už nebude možné, aby všetky tímy odohrali menej ako 6 zápasov. Tým sme vlastne vylúčili akýkoľvek väčší počet štartovných skupín, ako sú dve. **ALE...** Je tu jedna výnimka, o ktorej sme hovorili na začiatku. A to je prípad, **keď semifinále vyjde presne na 6. zápas**. Vtedy všetky tímy, ktoré vypadnú ešte pred semifinále, tak odohrajú 5 alebo menej zápasov, no a tímy, ktoré sa dostanú do semifinále (čo bude pre nich v poradí 6. zápas), tak ešte určite budú hrať 7. zápas – buď finále, alebo súboj o 3. miesto. A tak opäť nikto neodohrá presne 6 zápasov.

Každopádne vieme, že počet tímov už bude trochu väčší, a teda sa určite odohrajú vo vyraďovacej fáze viac ako len dve kolá. To prináša aj potenciálnu možnosť získať divokú kartu. Tu si však hneď treba uvedomiť jednu vec: našou podmienkou bolo, že **pre <u>KAŽDÝ</u> tím musí byť semifinále <u>presne</u> 6. zápasom v poradí**. Ak vypadnú skôr, nevadí, vtedy odohrajú menej ako 6 zápasov, ale ak sa dostanú do semifinále, tak to <u>musí</u> byť ich

6. zápas. Lenže čo ak niektorý tím dostane divokú kartu, a teda postúpi do ďalšieho kola bez toho, aby odohral príslušný zápas, zatiaľ čo ostatné tímy sa musia do toho istého kola prebojovať cez jeden odohratý zápas? Odrazu máme v jednom a tom istom kole rôzne tímy, ktoré majú odohrané rôzne počty zápasov. Hneď je nám jasné, že **v takomto prípade už nemôžu <u>VŠETCI</u> mať semifinále ako svoj 6. zápas**. Tento problém sa dá vyriešiť jediným spôsobom: **<u>počet tímov musí byť taký, aby nebolo treba udeľovať ŽIADNE DIVOKÉ KARTY</u>**.

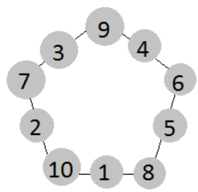
Takže si rozoberme turnaj, kde je šiestym zápasom semifinále. Pomerne jednoducho si dopočítame, že ak v skupinovej fáze každý tím odohral 3 zápasy, tak potom pred semifinále ešte musia byť dve kolá – pre tímy to budú štvrtý a piaty zápas – aby semifinále vyšlo ako 6. zápas v poradí. A koľko je na to treba tímov? Nuž pozrime sa na to: semifinále (6. zápas) hrajú 4 tímy, takže štvrť-finále (5. zápas) muselo hrať 8 tímov, potom osmi-finále (4. zápas) muselo hrať 16 tímov, no a skupinovú fázu (1., 2. a 3. zápas) tým pádom muselo hrať až 32 tímov.

Keďže už vieme, že okrem tejto výnimky nemôže byť počet tímov väčší ako 8, tak môžeme skonštatovať, že **počet tímov na začiatku turnaja mohol byť 8 alebo 32.**

<u>Bodovanie</u>:
dôkaz, že nesmela byť udelená divoká karta – 1b.; vysvetlenie, že viac tímov sa zúčastniť nemohlo – 1b.; vysvetlenie jednotlivých krokov riešenia – 2b.; dopracovanie sa ku obom správnym počiatočným počtom tímov – 1b.

<u>Úloha S2: Fontána. *Opravovala Kristína „Kika“ Prešinská*</u>*.*

Závažie, ktoré je v strede strany, je započítané do súčtu jednej strany. Závažie, ktoré je vo vrchole päťuholníka, je započítané raz do súčtu jednej strany a druhýkrát do súčtu druhej strany. Keďže chceme, aby bol súčet na každej strane čo najväčší, tak do vrcholov dáme najťažšie závažia – závažia s hmotnosťami 10 g, 9 g, 8 g, 7 g a 6 g.



Na určenie hmotnosti, aká má byť na jednej strane, použijeme malú fintu: predstav si, že by sme spočítali všetky strany päťuholníka dokopy. Pri pohľade na obrázok vidíme, že pri takomto spočítaní vlastne spočítame všetky čísla, ktoré tam sú, a dokonca čísla vo vrcholoch päťuholníka zarátame dvakrát – každé raz ako súčasť jednej strany, druhýkrát ako súčasť druhej strany. Takto dostaneme hodnotu: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 9 + 10 + 10 = 95. Na jednu stranu päťuholníka tým pádom musí prislúchať 95:5 = **19 gramov**. Už ich stačí len tak uložiť. Po chvíľke skúšania sa nám to podarí napríklad tak, ako na obrázku.

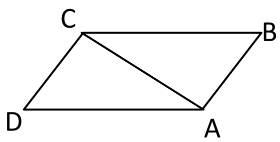
<u>Bodovanie</u>:
Všetky strhnutia bodov sú odôvodnené priamo v riešení.

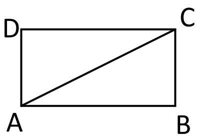
Úloha S3: Kráľovo želanie. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

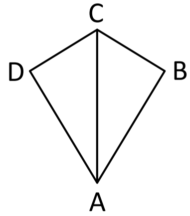
Nebudeme sa tajiť tým, že táto úloha nebola ľahká. Väčšina z Vás správne našla niektoré štvoruholníky, pre ktoré sa kráľovo želanie splniť nedá (štvorce, obdĺžniky, kosoštvorce a pod.), ale málokomu sa podarilo nájsť to naozaj správne kritérium pre všetky štvoruholníky. Nevadí, pozrime sa na to spolu.

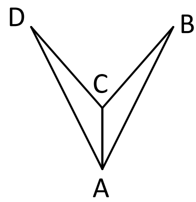
V zadaní je jedna veľká pomôcka: *„Enna sa zamyslela... pri štvorci by bod V musel ležať na uhlopriečke AC (aby boli rovnaké obsahy), no ale potom by kráľovstvá boli trojuholníkové.*“

Pozrime sa, ktoré ďalšie štvoruholníky majú tento problém. Samozrejme všetky rovnobežníky. Takisto všetky štvoruholníky, ktoré sú súmerné podľa uhlopriečky AC. Tu sú príklady „zlých“ štvoruholníkov:

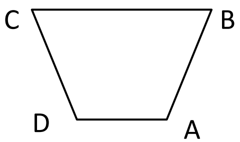


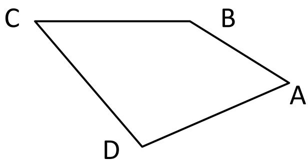


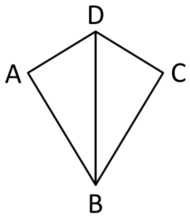


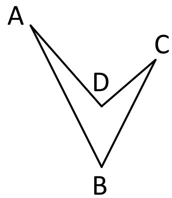


Tu sú príklady štvoruholníkov, ktoré nie sú súmerné podľa AC, a teda by mali ísť rozdeliť podľa kráľovho želania:



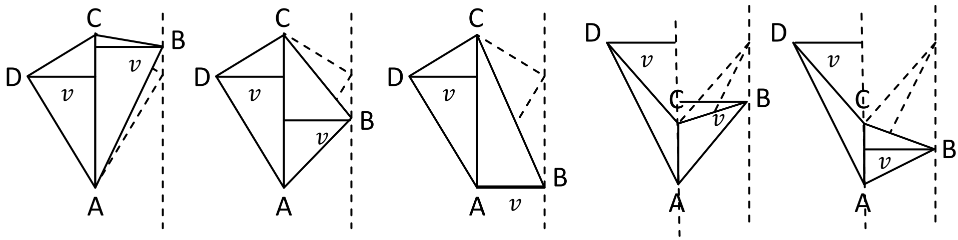






Všimnime si, že deltoid (tretí útvar) vyzerá tak isto ako ten, o ktorom sme pred chvíľou tvrdili, že nejde rozdeliť, iba veže A, B, C, D sú na ňom postavené inak.

Stačí nám takéto kritérium podľa súmernosti? Nie sú ešte iné útvary, kde by ABC a ADC mali rovnaký obsah, a teda bod V by musel ležať na uhlopriečke AC? Ale sú! Keď si napríklad zoberieme niektorý z tých symetrických (napríklad deltoid, alebo V-čko ako na prvom obrázku), a jednu jeho polovicu – trojuholník ABC – začneme meniť tak, aby mala stále rovnaký obsah, no bod B bol inde, dostaneme kopu ďalších útvarov, ktoré sa nebudú dať rozdeliť podľa kráľových požiadaviek. Ak by v nich bol bod V mimo uhlopriečky AC, nemali by rovnaký obsah, a ak by bol na nej, boli by to trojuholníky.



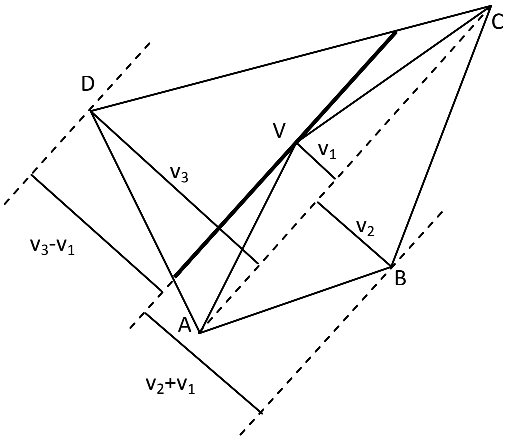
Toto je už konečná odpoveď na prvú otázku. **Kráľove podmienky sa nedajú splniť v tých štvoruholníkoch, v ktorých ABC a ADC majú rovnaký obsah, t.j. v tých, kde ABC a ADC majú rovnako dlhé výšky na stranu AC.** To sú všetky rovnobežníky a kopa ďalších útvarov, ako sme si ukázali. **Všetky ostatné štvoruholníky sú vhodné na delenie podľa požiadaviek kráľa.**

No a druhá časť úlohy – ako nájedme všetky vhodné miesta pre vežu Vincen v „dobrých“ štvoruholníkoch? Aj tu nám zadanie trochu napovedá, že „do úvahy prichádzalo viac miest“. Žiaľ, časť z Vás sa uspokojila s jedným (spravidla stred úsečky BD), my si však ukážeme všetky.

Dokreslime si uhlopriečku AC. Teraz majú trojuholníky ABC a ACD rôzny obsah. To je dobre. Pridaním bodu V a „hraníc“ AV a VC vytvoríme nový trojuholník AVC, ktorý akoby od jednej časti „ubudol“ a k druhej „sa pridal“. Kráľovstvá dvoch bratov potom budú mať obsahy $S_1 = S_{ABC} + S_{ACV}$, $S_2 = S_{ACD} - S_{AVC}$. Ak sa majú tieto obsahy rovnať, tak $\frac{|AC|\cdot v_1}{2} + \frac{|AC|\cdot v_2}{2} = \frac{|AC|\cdot v_3}{2} - \frac{|AC|\cdot v_1}{2}$. Všimnite si, že všetky tri zmienené trojuholníky majú spoločnú základňu AC, takže tá sa vo výpočte vykráti, rovnako ako dvojka z menovateľov, a dostaneme $v_1 + v_2 = v_3 - v_1$. Všetky body V, ktoré toto spĺňajú a sú zároveň vnútri kráľovstva, sú riešeniami.

Pozrieme sa na obrázok, a píšeme odpoveď, ako ich nájdeme. **Spravíme si rovnobežky s AC prechádzajúce bodmi B a D. Spravíme tretiu rovnobežku, ktorá je presne v strede medzi nimi. Všetky body, ktoré sú na tejto rovnobežke a zároveň vnútri štvoruholníka ABCD, sú vhodné na postavenie veže V.**

Sami si vyskúšajte, že tento postup funguje aj na nekonvexných štvoruholníkoch.



Bodovanie:

Za prvú časť (ktoré idú/nejdú rozdeliť) bolo 2,5 boda, pričom max. 1,5 dostali tí, ktorí označili za zlé len rovnobežníky. Za druhú časť bolo tiež 2,5 boda, pričom max. 1,5 dostali tí, ktorí ako vhodné miesto pre V označili len stred úsečky BD. Za nevysvetlenie svojho postupu som strhával po 0,5 bodoch.

Úloha S4: Problém. *Opravovala Ľudmila „Ľudka“ Šimková.*

Taro má 15 opálov, Naro má 9 rubínov a Zaquis má 7 diamantov. Ak každý odovzdá ostatným dvom po jednom zo svojich kameňov, budú mať všetci korisť rovnakej hodnoty. Zapíšme si, ako by to po tejto výmene vyzeralo (**o** je opál, **r** je rubín, **d** je diamant):

Taro:	13 **o**	+	1 **r**	+	1 **d**	=	97 560 Frankov
Naro:	1 **o**	+	7 **r**	+	1 **d**	=	97 560 Frankov
Zaquis:	1 **o**	+	1 **r**	+	5 **d**	=	97 560 Frankov

Vidíme, že každý z nich má aspoň jeden **o**pál, jeden **r**ubín a jeden **d**iamant. Ak by každý z nich odložil bokom jeden **o**pál, jeden **r**ubín a jeden **d**iamant, ešte stále by mali všetci traja korisť rovnakej hodnoty (kamene rovnakého druhu majú rovnakú hodnotu). Tarovi by ostalo 12 **o**pálov, Narovi 6 **r**ubínov a Zaquisovi 4 **d**iamanty, čiže:

12 **o** = 6 **r** = 4 **d**

Z tohto už vieme porovnať hodnotu jednotlivých kameňov.

(Taro)		(Naro)		(Taro)		(Zaquis)	
12 **o**	=	6 **r**	/ :6	12 **o**	=	4 **d**	/ : 4
2 **o**	=	1 **r**		3 **o**	=	1 **d**	

Jeden **d**iamant má rovnakú hodnotu ako 3 **o**pále, zároveň však 3 **o**pále môžeme nahradiť ako 1 **o**pál a 1 **r**ubín. Keď sa pozrieme na Zaquisovu korisť po výmene, zajasáme, lebo vidíme, že ak jeho 1 **o**pál a 1 **r**ubín nahradíme **d**iamantom, dostaneme, že 6 **d**iamantov má hodnotu 97 560 Frankov. Z toho už ľahko určíme, že **jeden diamant má hodnotu 16 260 Frankov**.

Bodovanie:
výsledok bez odôvodnenia – 3b.; podľa úplnosti a správnosti riešenia – 3-5b.

Úloha S5: Číslo domu. *Opravoval Roman Kluvanec.*

Cifry hľadaného čísla si označíme A, B, C, D. Potom si pod seba napíšeme verzie tohoto čísla pri jednotlivých zaokrúhľovaniach – pozri obrázok. Označenie $^{(+1?)}$ znamená, že zatiaľ nevieme, či sa cifra na danom mieste kvôli zaokrúhľovaniu zväčší o 1, alebo nie. No a zo zadania vieme, že súčet týchto štyroch čísel musí byť 5443.

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ A & B & C^{(+1?)} & 0 \\ A & B^{(+1?)} & 0 & 0 \\ A^{(+1?)} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 4 & 4 & 3 \end{array}$$

Hneď na prvý pohľad je jasné, že musí byť $D = 3$. Vďaka tomu vieme tiež povedať, že cifra C sa pri zaokrúhľovaní nebude meniť, pretože trojka na mieste jednotiek sa zaokrúhli dole. To znamená, že súčet $C + C$ musí končiť cifrou 4. Sú iba dve možnosti, ako to dosiahnuť:

1) Ak ***C* = 2**. Vtedy je ***C*** + ***C*** = 4, takže nič netreba prenášať do ďalšieho stĺpca, a tiež cifra ***B*** sa pri zaokrúhľovaní nezmení, lebo ***C*** **= 2** na mieste desiatok sa zaokrúhli dole. Tým pádom potrebujeme, aby súčet ***B*** **+** ***B*** **+** ***B*** končil cifrou 4. To sa dá dosiahnuť jedine tak, že bude ***B*** **= 8**, a teda súčet v danom stĺpci bude 8+8+8 = **24**. To už ale vyzerá problematicky, pretože teraz musíme do posledného (ľavého) stĺpca prenášať dvojku a ešte aj cifru ***A*** zaokrúhľovať nahor, tak, že vznikne ***A*+1**. Ak by sme rovno za ***A*** dosadili najmenšiu možnú cifru, ***A*** **= 1**, tak aj tak súčet v poslednom stĺpci vyjde 1+1+1+2+2$^{\text{(prenesená)}}$ = 7, čo je priveľa. Takže táto možnosť sa nám nepotvrdila, skúsme druhú...

A	***B***	**2**	**3**
A	***B***	**2**	**0**
A	***B***	**0**	**0**
$\boldsymbol{A}^{(+1?)}$	**0**	**0**	**0**
5	**4**	**4**	**3**

2) Ak ***C* = 7**. Vtedy je ***C*** + ***C*** = 14, takže do ďalšieho stĺpca prenášame jednotku, a tiež cifra ***B*** sa pri zaokrúhľovaní zväčší na ***B*+1**. Takže ďalší výpočet bude ***B*** **+** ***B*** **+ (*B*+1) + 1**, a tento tiež musí končiť cifrou 4. Ľahko prídeme na to, že jedinou možnosťou, ako to dosiahnuť, je dosadiť ***B*** **= 4**, pričom súčet v danom stĺpci potom vyjde **14**. Opäť musíme preniesť jednotku a taktiež vidíme, že cifra ***A*** sa pri zaokrúhľovaní nezmení, lebo ***B*** **= 4** na mieste stoviek sa zaokrúhli dole. Už len veľmi jednoducho určíme, že ***A*** **= 1** a hurá, úloha je vyriešená!

A	***B***	**7**	**3**
A	***B***	**7**	**0**
A	***B*+1**	**0**	**0**
$\boldsymbol{A}^{(+1?)}$	**0**	**0**	**0**
5	**4**	**4**	**3**

Pôvodné číslo na papieriku bolo 1473.

1	**4**	**7**	**3**
1	**4**	**7**	**0**
1	**5**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**
5	**4**	**4**	**3**

Bodovanie:

Všetky strhnutia bodov sú odôvodnené priamo v riešení.