Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

32. ročník www.pikomat.sk školský rok 2014/2015

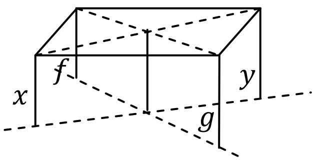
Vzorové riešenia 3. série zimnej časti, kategória 8–9

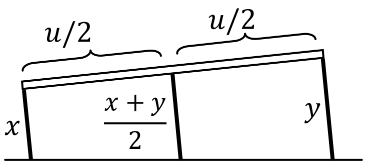
Úloha S1: Nešikovný stolár. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Na to, aby sa stôl nekýval, sa musia všetky 4 nohy naraz dotýkať zeme. Teda ich konce musia byť v jednej rovine. Tri dĺžky nôh poznáme, ale nevieme, ako sú usporiadané. Najprv sa na to pozrime trochu všeobecnejšie.

Môžeme si do stredu stola pridať ešte piatu, fiktívnu nohu (ako stred stola budeme označovať priesečník uhlopriečok dosky stola). Keďže podľa zadania je Tomabiho stôl obdĺžnik, všetky jeho nohy sú rovnako ďaleko od stredu, čo je fajn. Toto platí bez ohľadu na rozmery stola, dôležité je, že je to obdĺžnik (resp. ľubovoľný rovnobežník).

Na to, aby sa stredná noha presne dotýkala zeme (nepretŕčala ani nebola krátka), musí – keďže je v strede – byť tak dlhá, ako je priemer dĺžok nôh na uhlopriečke.





Pravdaže, na jednom a tom istom stole (ak sa nekýve) musí vychádzať stredná noha rovnako pre obe uhlopriečky. Dajme tomu, že neznáma je noha x. Potom musí platiť:

$$\frac{x+y}{2}=\frac{f+g}{2} \quad \rightarrow \quad x+y=f+g \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x=f+g-y}.$$

Teda zrátame dve nohy, ktoré sú na jednej uhlopriečke a od nich odrátame dĺžku nohy, ktorá je na uhlopriečke s neznámou nohou.

Možnosti sú teda tri, dĺžky v tabuľke sú v centimetroch.

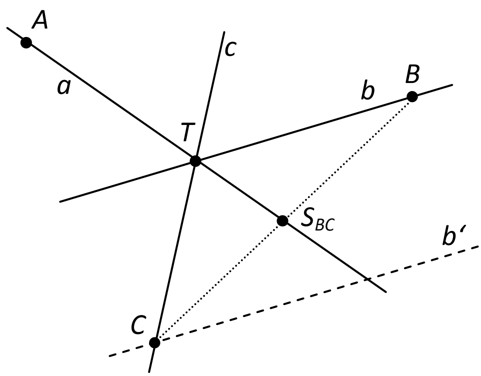
#	Noha oproti neznámej (y)	Zvyšné dve nohy (f, g)	Výpočet	**Dĺžka neznámej nohy**
1.	100	96, 97	x=96+97–100	**93**
2.	97	96, 100	x=96+100–97	**99**
3.	96	97, 100	x=97+100–96	**101**

Bodovanie:
určenie jednej možnosti – 1b.; určenie všetkých možností – 1b.; uvedenie vzťahu na výpočet – 1b.; vysvetlenie, prečo to funguje (nápad so strednou nohou alebo niečo podobné) – 2b. podľa kvality vysvetlenia; obrázok bol vítaný, ale nie nevyhnutný.

Úloha S2: Útržok. *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula.*

Úloha má viacero správnych postupov, ktorými sa vieme dopátrať k bodom B a C, a tým zostrojiť pôvodný trojuholník. Na vyriešenie úlohy stačilo použiť ktorýkoľvek z nich. Poďme si jeden z možných postupov priblížiť.

Vieme, že ťažisko rozdeľuje ťažnicu v pomere 1:2. My vrchol trojuholníka A aj ťažisko T poznáme, a tak si vieme na priamke a zostrojiť bod S_{BC} – stred strany BC. Keďže vieme, že S_{BC} je stredom strany BC, tak môžeme tvrdiť, že body B a C sú navzájom stredovo súmerné podľa bodu S_{BC}. Bod B (ani C) síce ešte nepoznáme, ale vieme, že leží na priamke b. A tak môžeme celú túto priamku zobraziť v stredovej súmernosti podľa bodu S_{BC}. Vznikne tak priamka b', na ktorej bude musieť ležať aj obraz bodu B – čiže bod C. Tento bod C ale, ako vieme, okrem toho musí ležať aj na priamke c. Tým pádom je jasné, že bod C bude ležať na priesečníku priamok b' a c.



Už nám chýba iba bod B. Ten môžeme nájsť dvoma spôsobmi. Buď zopakujeme ten istý postup ako pri hľadaní bodu C, alebo jednoducho prenesieme bod C stredovo súmerne podľa S_{BC}. Tým sme našli oba hľadané body a vieme zostrojiť pôvodný trojuholník ABC.

Bodovanie:
konštrukcia alebo prehľadný náčrt jedného zo správnych riešení – 1b.;
popis konštrukcie – 1,5b.; vysvetlenie postupu – 2,5b.

Úloha S3: Plagát. *Opravoval Roman Kluvanec.*

Najskôr sa musíme zamyslieť, kam má význam doplniť zátvorku. Ak by sme zátvorku umiestnili za znamienko plus, vo výraze by sa nič nezmenilo, pretože všetky čísla v zátvorke, pred ktorými je plus, by sme aj tak pričítavali a tie, pred ktorými je mínus, odčítavali. Musíme ju teda dať za znamienko mínus. Tým akoby sme zmenili všetky hodnoty v zátvorke na opačné.

Máme tri základné možnosti: umiestniť zátvorku za prvé, druhé, alebo tretie mínusko v rámci danej trojice.

Teraz sa ešte pozrime na všetky šestice čísel, pre ktoré sa opakujú znamienka. Ako vyzerá ich súčet? Označme si prvé číslo zo šestice písmenom n. Potom súčet celej šestice bude vyzerať takto:

$$n + (n+1) + (n+2) - (n+3) - (n+4) - (n+5) = n + n + n - n - n - n + 1 + 2 - 3 - 4 - 5 = -9.$$

Vidíme, že samotné písmená n sa navzájom odčítali, a tak sme zistili, že súčet každej šestice (ktorá nie je upravená zátvorkou) je –9. Poďme sa teda pozrieť na naše tri možnosti.

1) <u>Zátvorku dáme v rámci niektorej trojice pred **posledné** odčítavané číslo</u>.
Potrebujeme dosiahnuť súčet 378. Keďže máme 600 čísel, tak máme 100 šestíc. Zostavíme si teda rovnicu, kde sčítame prvých n šestíc, ďalšiu šesticu si vyjadríme pomocou čísla n ako $(6n+1) + (6n+2) + (6n+3) - (6n+4) - (6n+5) - (6n+6)$, a potom odpočítame zvyšné šestice, ktorých počet bude $100 - n - 1$, pretože z celkového počtu 100 šestíc sme už zarátali prvých n a ešte jednu, v ktorej začína zátvorka. Nájdená hodnota n bude potom vyjadrovať poradie poslednej šestice, do ktorej sme nevložili zátvorku. Rovnica bude vyzerať nasledovne:

$$n\cdot(-9) + \mathbf{(6}\boldsymbol{n}\mathbf{+1) + (6}\boldsymbol{n}\mathbf{+2) + (6}\boldsymbol{n}\mathbf{+3) - (6}\boldsymbol{n}\mathbf{+4) - (6}\boldsymbol{n}\mathbf{+5) - (6}\boldsymbol{n}\mathbf{+6)} - (-9)\cdot(100 - n - 1) = 378$$
$$-9n + 18n + 6 - 18n - 15 + 9\cdot(99 - n) = 378$$
$$-9n - 9 + 891 - 9n = 378$$
$$-18n = -504$$
$$\boldsymbol{n} \mathbf{= 28}$$

Takže počet neupravených šestíc bude 28, čo znamená, že číslo, pred ktoré treba dať zátvorku, bude posledné v 29. šestici, teda $6\cdot 28 + 6 =$ **174**. **Zátvorku môžeme umiestniť pred číslo 174.**

Stále nám však ostávajú dve nepreskúmané možnosti, ktoré nás môžu doviesť k ďalším riešeniam.

2) <u>Zátvorku dáme v rámci niektorej trojice pred **prostredné** odčítavané číslo</u>.
V tomto prípade si opäť zostavíme rovnicu, avšak keďže zátvorka bude už pred piatym číslom danej šestice, tak posledné číslo v tejto šestici musí mať opačné znamienko. Táto šestica teda bude vyzerať takto: $(6n+1) + (6n+2) + (6n+3) - (6n+4) - (6n+5) \underset{!}{+} (6n+6)$. Vznikne nám nasledovná rovnica:

$$n\cdot(-9) + \mathbf{(6}\boldsymbol{n}\mathbf{+1) + (6}\boldsymbol{n}\mathbf{+2) + (6}\boldsymbol{n}\mathbf{+3) - (6}\boldsymbol{n}\mathbf{+4) - (6}\boldsymbol{n}\mathbf{+5)} \overset{!}{\mathbf{+}} \mathbf{(6}\boldsymbol{n}\mathbf{+6)} - (-9)\cdot(100 - n - 1) = 378$$
$$-9n + 24n - 12n + 3 + 9\cdot(99 - n) = 378$$
$$3n + 3 + 891 - 9n = 378$$
$$-6n = -516$$
$$\boldsymbol{n} \mathbf{= 86}$$

Takže druhou možnosťou je ponechať 86 šestíc bez zátvorky, a potom umiestniť zátvorku pred piate číslo 87. šestice, čiže pre číslo $86\cdot 6 + 5 =$ **521**. **Zátvorku môžeme umiestniť pred číslo 521.**

3) Zátvorku dáme v rámci niektorej trojice pred **prvé** odčítavané číslo.

Ako aj v predchádzajúcich prípadoch, aj tu si napíšeme rovnicu s jednou neznámou n, ktorá bude vyjadrovať počet celých šestíc pred zátvorkou. Keďže umiestňujeme zátvorku už pred prvé odčítavané číslo, znamienka sa nám zmenia pred piatym a šiestym číslom z upravovanej šestice, takže táto šestica bude mať tvar: $(6n+1) + (6n+2) + (6n+3) - (6n+4) \mathbf{+} (6n+5) \mathbf{+} (6n+6)$. Rovnica bude:

$$n\cdot(-9) + \mathbf{(6}\boldsymbol{n}\mathbf{+1) + (6}\boldsymbol{n}\mathbf{+2) + (6}\boldsymbol{n}\mathbf{+3) - (6}\boldsymbol{n}\mathbf{+4)} \overset{!}{\mathbf{+}} \mathbf{(6}\boldsymbol{n}\mathbf{+5)} \overset{!}{\mathbf{+}} \mathbf{(6}\boldsymbol{n}\mathbf{+6)} - (-9)\cdot(100 - n - 1) = 378$$

$$-9n + 30n - 6n + 17 - 4 + 9\cdot(99 - \mathrm{n}) = 378$$

$$15n + 13 + 891 - 9n = 378$$

$$6n = -526$$

$$\boldsymbol{n = -87{,}666}$$

Vidíme, že nám vyšiel záporný a necelý počet šestíc, čo znamená, že táto možnosť nepripadá do úvahy. **Výraz bude mať súčet 378 vtedy, ak umiestnime ľavú zátvorku pred číslo 174 alebo 521.**

Bodovanie:

každý zo správnych výsledkov – 1b.; postup – 2b.; dôkaz, že každá šestica čísel má súčet mínus 9 – 0,5b.; vysvetlenie, prečo dávame zátvorku len za znamienko mínus – 0,5b.

Úloha S4: Pod lipou. *Opravovala Kristína „Kika“ Prešinská.*

Anride začína a na začiatku nezáleží na tom, aký symbol použije, pretože na hracom pláne ešte žiaden iný nie je. Uvažujme teda, že najprv použije X. Zaujímavý je prípad, keď dá X do stredu tabuľky, pretože toto políčko ovplyvňuje všetky ostatné políčka.

Zaquis tým pádom už X použiť nemôže, pretože by v niektorom smere boli už dve X a Anride by v ďalšom ťahu dala tretie X a vyhrala. Zaquis teda použije O. Tabuľka je symetrická, a tak sú vlastne len dve možnosti, kam O môže uložiť: buď do niektorého rohu, alebo do stredu niektorej strany.

1) Ak Zaquis dá O do rohu.

Anride potom môže dať O do protiľahlého rohu a nastane situácia ako na Obr. 1. Na ťahu je Zaquis, ale nech dá akýkoľvek znak na ktorékoľvek voľné políčko, v každom prípade vytvorí dvojicu rovnakých znakov v niektorom smere, a tak Anride v ďalšom ťahu vyhrá. Takže sme zistili, že ak Zaquis dá vo svojom prvom ťahu O do rohu, Anride dá do protiľahlého rohu (Obr. 1) a vyhrá.

O		
	X	
		O

Obr. 1

2) Ak Zaquis dá O do stredu strany.

Potom Anride dá O na políčko presne oproti a nastane situácia ako na Obr. 2. Teraz ak Zaquis nechce vytvoriť žiadnu dvojicu rovnakých znakov, ktorú by Anride mohla hneď v ďalšom ťahu doplniť do trojice, tak musí dať znova O na niektorý z voľných stredov strán. Anride potom opäť dá (akýkoľvek symbol) presne oproti a vznikne situácia ako na Obr. 3. Opäť vidíme, že nech Zaquis doplní O alebo X na ktorékoľvek zvyšné políčko, Anride v ďalšom ťahu doplní do trojice a vyhrá.

	O	
	X	
	O	

Obr. 2

	O	
O	X	O/X
	O	

Obr. 3

Takže sme zistili, že **Anride vie hrať tak, že nech Zaquis hrá akokoľvek, Anride vždy vyhrá.**

Mnohí riešitelia tvrdili, že v druhej možnosti nezáleži na tom, na ktorý stred strany dá Anride svoj druhý ťah. Tak sa na to pozrime. Anride teda vo svojom druhom ťahu uloží O na iný stred strany než ten oproti Zaquisovmu prvému ťahu. Zaquis potom môže dať O do najvzdialenejšieho rohu, ako na Obr. 4.

	O	
O	X	
		O

Obr. 4

Ale ak by potom obaja hrali najlepšie, ako môžu, hra by skončila remízou.

Bodovanie:
dať prvý symbol do stredu – 0,5b.; 1. Zaquisov spôsob: dať do rohu – 2b.;
2. Zaquisov spôsob: dať do stredu strany – 2,5b.

Úloha S5: Kúzlo. *Opravoval Juraj „Juro“ Pavlovič.*

Dobrovoľníci mali mať *„aspoň meter* a *menej ako dva metre“*, takže museli byť vysokí od 100 cm do 199 cm. My máme dokázať Ennine tvrdenie, že medzi 12 rôzne vysokými dobrovoľníkmi sa URČITE nájdu dvaja, ktorých rozdiel výšok bude dvojciferné číslo s rovnakými ciframi – teda číslo deliteľné 11-timi.

To dokážeme tak, že sa najprv budeme snažiť dosiahnuť presný opak – teda budeme sa snažiť nájsť 12 takých výšok, medzi ktorými NEbude žiadna dvojica s rozdielom deliteľným 11. Ak pri tom zistíme, že takýchto 12 výšok sa nájsť nedá, tak to bude znamenať, že Ennine tvrdenie muselo byť správne. Takémuto postupu sa v matematike hovorí *dôkaz sporom*.

Veľmi pekným a prehľadným postupom bolo vytvoriť skupinky takých čísel, ktoré so sebou navzájom majú práve rozdiel deliteľný 11. Tieto skupiny vidíme ako stĺpce v tabuľke. Pochopiteľne, sú to vždy čísla, ktoré sa postupne zväčšujú / zmenšujú o 11. Takýchto skupín sa vytvorilo 11.

No a teraz tá dôležitá vec: **keď z 11 skupín vyberieme 12 dobrovoľníkov, tak si môžeme byť ISTÍ, že určite aspoň dvaja sú z rovnakej skupiny**. A to je vlastne všetko, čo nám treba. Lebo my už vieme, že akonáhle sú niektorí dvaja dobrovoľníci z rovnakej skupiny, tak to znamená, že rozdiel ich výšok je dvojciferné číslo s rovnakými ciframi. Takže preto si Enna a Anride mohli byť také isté, že sa im kúzlo určite podarí.

Je tiež zaujímavé si všimnúť, že skupiny (stĺpce v tabuľke) združujú vždy také čísla, ktoré dávajú po delení 11-timi rovnaký zvyšok – viď posledný riadok tabuľky.

100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143
144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154
155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176
177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187
188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198
199										
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(0)

Bodovanie:
akýkoľvek korektný dôkaz, prečo kúzlo vždy funguje – 5b.;
za menšie nepresnosti v dôkaze som strhával 0,5-1,5b.;
pri závažnejších nedostatkoch ste mohli dostať okolo 2,5b.