Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

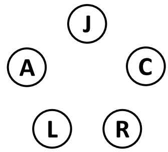
PIKOMAT

32. ročník www.pikomat.sk školský rok 2014/2015

Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 8–9

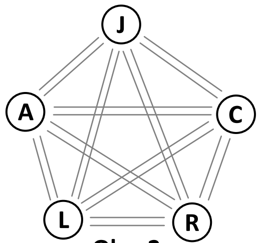
Úloha S1: Kamarátky. *Opravoval Juraj „Juro“ Pavlovič.*

Táto úloha sa, pravdaže, dala vyriešiť ako sústava veľa rovníc s ešte viac neznámymi. Mnohí ste sa do toho presne takto pustili a tí, ktorí sa pri prácnom narábaní s rovnicami nepomýlili, sa spravidla aj dopracovali k správnemu výsledku.



Obr. 1

Tu si však ukážeme postup, pri ktorom sa nebolo treba mordovať s toľkými rôznymi písmenkami, stačilo si všimnúť jednu-dve zaujímavé skutočnosti. Kamarátky budeme označovať prvými písmenami ich krstných mien: J, C, A, L, R a rozloženie ich domov si symbolicky načrtneme do päťuholníka, ako na Obr. 1 (skutočné rozostavenie domov pre nás nie je podstatné, budeme sa opierať iba o časové údaje zo zadania).



Obr. 2

V zadaní je opísaných 6 okruhov a ku 5 z nich aj prislúchajúce časy, koľko trvá ich prejsť. Všetky končia tam, kde začínali, a tak stačí vypísať si ich ako postupnosti navštívených domov:

(1) R C A = 120 min;

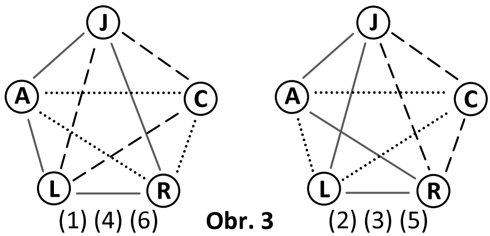
(2) C A L = 150 min;

(3) R J C = 75 min;

(4) C L J = 150 min;

(5) R A J L = 180 min;

(6) R J A L = ???



Obr. 3

Prvá zaujímavá vec, ktorú sa oplatilo spraviť, bolo načrtnúť si do obrázka úplne všetky prejdené trasy od (1) až po (6). Vôbec nevadí, že je tam veľa čiar a že po chvíli už ťažko rozlíšiť, ktorá cestička patrila do ktorej trasy. To naozaj zaujímavé je všimnúť si, že **všetky cestičky boli prejdené presne dvakrát (Obr. 2)**.

A kto sa naozaj pozorne zadíval na takýto obrázok, mohla mu napadnúť **druhá, ešte zaujímavejšia vec**: Na Obr. 3 vidíme, čo sa stane, keď do jedného obrázka zakreslíme iba trasy (1), (4) a (6); a do druhého obrázka zakreslíme iba trasy (2), (3) a (5).

Vidíme, že **v oboch prípadoch sú prejdené presne tie isté cestičky** – všetkých 10, každá práve raz. Takže z toho hneď môžeme usúdiť, že prejsť trasy (1), (4), (6) musí dokopy trvať presne rovnako dlho, ako prejsť trasy (2), (3), (5). Zvyšok je maličkosť: Podľa trás (2), (3), (5) spočítame, že to musí trvať 150 + 75 + 180 = 405 min. Potom už len odrátame trvanie trás (1) a (4) a zistili sme, že trasa (6) bude trvať 405 – 120 – 150 = 135 min.

Ostáva k tomu už len pripočítať 10 min, ktoré Ritta potrebuje na presun z domu na námestie a riešenie máme pred sebou: **Dario má Rittu čakať na námestí za 145 minút, resp. za 2 hodiny a 25 minút.**

Bodovanie:
správny výsledok s akýmkoľvek korektným vysvetlením – 5b.; viac-menej náhodné doplňovanie časov pre konkrétne cestičky – okolo 2,5b. podľa úrovne popisu; za rôzne chyby a nepresnosti som strhával 0,5 až 1b.

Úloha S2: Airina úloha. *Opravovala Alexandra „Saša“ Porembová.*

Mnohí z Vás pri riešení úlohy predpokladali, že x a y sú kladné čísla. Zo zadania však takáto podmienka priamo nevyplýva, a tak sa musíme zamyslieť aj nad tým, či niektoré z čísel nie je záporné.

Ak by boli **obe čísla záporné**, potom by aj ich súčet bol záporný a nespĺňali by prvú podmienku zo zadania.

Ak by bolo ***x* záporné** a ***y* kladné**, tak by po odčítaní y od (zaokrúhleného) x vznikol záporný výsledok, čo je zas problém pre druhú podmienku v zadaní.

Ak by bolo ***x* kladné** a ***y* záporné**: Z prvej podmienky by vyplývalo, že $x \geq 98{,}7$. Pri druhej podmienke máme od (zaokrúhleného) x odčítať y. Lenže odčítanie záporného y nám výsledok zas len zväčší, a teda sa nikdy nemôžeme dostať na požadovaný výsledok 23,4.

Zistili sme teda, že ***x* aj *y* sú kladné čísla**.

Vieme, že hocijaké číslo bude po zaokrúhlení na desiatky mať na mieste jednotiek, desatín, stotín, atď., samé nuly. My sme sčítali takto zaokrúhlené číslo y s číslom x a dostali sme výsledok 98,7. Z toho vieme určiť, že x muselo mať na mieste jednotiek číslicu 8 a na mieste desatín číslicu 7, teda **číslo *x* končí na *...8,7***. Obdobnou úvahou z druhej podmienky zo zadania zistíme, že **číslo *y* končí na *...6,6***.

Z toho vyplýva, že x aj y sa budú obe zaokrúhľovať nahor. Pozrime sa, čo vlastne *zaokrúhľovanie nahor* znamená. Ak zaokrúhlime na desiatky číslo končiace na 8,7, je to to isté, ako keby sme k nemu pričítali 1,3. Podobne, zaokrúhlenie čísla končiaceho na 6,6 je to isté ako pričítanie 3,4. Týmto spôsobom si teraz vyjadríme podmienky zo zadania:

$$(y + 3{,}4) + x = 98{,}7$$
$$(x + 1{,}3) - y = 23{,}4.$$

Z týchto dvoch rovníc už jednoduchými úpravami dostávame hľadaný výsledok: $\boldsymbol{x = 58{,}7}$ a $\boldsymbol{y = 36{,}6}$. Všetky kroky, ktoré sme v priebehu riešenia urobili, boli jednoznačné, preto je náš výsledok jediným možným. Pre istotu spravíme ešte skúšku správnosti: 40+58,7 = 98,7; 60–36,6 = 23,4. Sedí vec!

Bodovanie:
zdôvodnenie kladnosti – 1b.; určenie cifier na miestach jednotiek a desatín – 1b.; ďalšie správne úvahy vedúce k výsledku – 2b.; výsledok – 1b.

Úloha S3: Pianri. *Opravovala Kristína „Krisa“ Faguľová.*

Ako prvé si je dobré všimnúť, že na hracom pláne $1 \times n$ (iba jediný riadok) vždy vyhrá prvý hráč. Jednoducho hneď vyškrtne celý riadok.

Teraz sa pozrime na ostatné možné hracie plány v závislosti od parity ich rozmerov *(parita je vlastnosť čísla, ktorá hovorí o tom, či je párne alebo nepárne)*.

1) Ak *m* aj *n* sú párne čísla. Tu existuje výherná stratégia pre druhého hráča založená na symetrii: druhý hráč symetricky opakuje ťahy prvého hráča. Napríklad ak prvý hráč škrtne tretí riadok zhora, druhý hráč škrtne tretí riadok zdola. Ak prvý hráč škrtne piaty stĺpec sprava, druhý hráč škrtne piaty stĺpec zľava, atď. Keďže počet riadkov aj stĺpcov je párny, druhý hráč bude mať vždy možný ťah. Našli sme **víťaznú stratégiu pre druhého hráča**.

2) Ak *m* aj *n* sú nepárne čísla. Znova existuje víťazná stratégia pre druhého hráča. Ak prvý hráč v prvom ťahu škrtne (ktorýkoľvek) riadok, druhý hráč škrtne (ktorýkoľvek) stĺpec, prípadne naopak. Tým sa rozmery hracieho plánu zmenia na párne a my už z predošlého odseku vieme, že v takomto prípade vyhráva druhý hráč. Aj tu teda existuje **víťazná stratégia pre druhého hráča**.

3) Ak jeden z rozmerov je párne číslo a druhý nepárne. Akonáhle prvý hráč v prvom ťahu škrtne (ktorýkoľvek) riadok alebo (ktorýkoľvek) stĺpec, rozmery hracieho plánu sa zmenia buď na obidva párne, alebo obidva nepárne. Z predošlých dvoch odsekov už vieme, že v takejto situácii vyhráva ten, kto práve nie je na ťahu, čo je prvý hráč. Je tu **víťazná stratégia pre prvého hráča**.

Odpoveď: Rozhodnutie závisí od konkrétnych rozmerov obdĺžnika. To, či by mal ísť Dario prvý, alebo druhý, sme popísali vyššie.

Bodovanie:
postup a zdôvodnenie – 3,5b.; odpoveď – 1,5b.; vynechaný prípad hracieho plánu s rozmermi $1 \times n$ – mínus 0,5b.

Poznámka:
Mnohí ste rozoberali veľa možností, ale neuviedli ste všeobecné riešenie. Viacerí tiež zabudli rozriešiť prípad hracieho plánu s rozmermi $1 \times n$. Som však rada, že niektorým sa hra tak zapáčila, že ju hrali aj so spolužiakmi.

Úloha S4: Muži v bielom. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Najjednoduchšie bude určiť si, kto môže hovoriť pravdu. Ale ako spoznať, že niekto hovorí pravdu? Čo je pravda?

Keď niekto odpovie „5“ a má mať pravdu, znamená to, že ešte presne 4 ľudia musia tiež odpovedať „5“, teda musí túto odpoveď dať presne 5 ľudí. Vtedy **je možné**, že celá táto skupina 5 ľudí hovorí pravdu (ale aj nemusí). Nazvime to, že takáto skupina **sa zhodla**. Ak však niekto tvrdí nejaký počet, povedzme napr. 7, a nezhodnú sa na ňom práve siedmi, určite je to klamár.

Prečo potom, keď sa nejaká skupina *n* ľudí zhodne, ešte nemusí mať pravdu? Jednoducho preto, že sa môže zhodnúť aj ďalšia skupina. Vtedy môže mať pravdu ktorákoľvek jedna z tých skupín. Všimnime si, že aj prázdna skupina (o veľkosti 0) sa zhodne. Inak povedané: môže sa stať, že všetci klamú. Ak však niekto odpovie „0“, spôsobí tým, že skupina 0 ľudí sa nezhodla, lebo tú nulu povedalo viac než nula ľudí. V takom prípade nie je možné, že všetci klamú, a teda aspoň jedna skupina sa musí zhodnúť.

S týmito základmi sa môžeme konečne pozrieť na 15 odpovedí zo zadania. Kvôli prehľadnosti si ich zoradíme: 1, 3, 3, 3, 7, 8, 12, 12, 12, 13, 15, 16, 17, 22, 41. Keďže už to máme tak dobre premyslené, ľahko si všimneme, že sú tu až tri skupiny, ktoré sa v rámci seba zhodli. Skupina troch ľudí hovoriacich „3“, samostatná osoba hovoriaca „1“, a prázdna skupina pomyselne hovoriaca „0“. Ktorákoľvek jedna z týchto skupín môže mať pravdu. Pravdu môžu mať 0, 1 alebo 3 ľudia, čiže **klamú najmenej 12-ti a najviac 15-ti**.

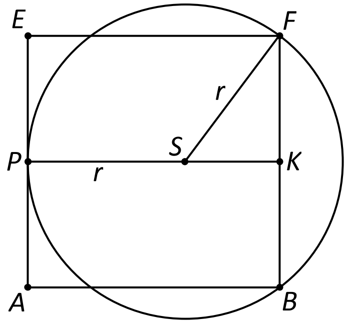
Druhá časť zadania nám káže sa zamyslieť, ako by museli vyzerať odpovede, aby sa z nich dal jednoznačne zistiť počet klamárov. To je teraz už jednoduché: Potrebujeme tam mať **<u>jedinú</u> skupinu, ktorá sa zhodne**. Pre lepšiu názornosť si toto ešte rozoberme na 2 prípady: V prvom prípade sa zhodne prázdna skupina, čiže všetci klamú a nikto nepovie „0“. Žiadnej inej zhodujúcej sa skupiny niet. V druhom prípade sa zhodne jediná neprázdna skupina (napr. presne 6 ľudí povie „6“), a navyše aspoň jeden človek odpovie „0“, aby sa vylúčila možnosť, že všetci klamú.

Bodovanie:
uvedomenie si princípu zhody v skupine – 2,5b.; odpoveď „najmenej 12 a najviac 15 klamárov“ – 1b.; kto neprišiel na možnosť 15 klamárov a odpovedal 12–14, stratil 0,5b.; vyriešenie jednoznačnosti (druhej časti zadania) – 1,5b.; na získanie bodov za druhú časť nebolo nutné riešiť situáciu s vyrieknutím nuly tak podrobne, ako je popísaná tu.

Úloha S5: Zvláštny voz. *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula.*

Vieme, že guľová plocha sa dotýka stredu steny *ADHE* (nazvime si tento bod dotyku *P*) a jej prienik s protiľahlou stenou tvorí kružnica vpísaná štvorcu *BCGF*. Stred tejto kružnice, ktorý je zároveň stredom steny *BCGF*, nazvime *K*. Keď sa tento útvar pokúsime zjednodušiť, tak sa nám vďaka jeho súmernosti pri „pohľade zboku“ naskytne pohľad znázornený na obrázku.

Z kocky nám ostal štvorec a z guľovej plochy kružnica opísaná trojuholníku *PBF*. Pozor, pamätajme, že toto je <u>len zjednodušujúca pomôcka</u> vďaka pohľadu zboku. V skutočnosti guľová plocha neprechádza cez body *F* ani *B*!



Keďže trojuholník *PBF* je z očividných dôvodov rovnoramenný, môžeme si načrtnúť bod *S* na úsečku *PK*. Vieme, že obe úsečky *PS* aj *SF* sú polomermi kružnice. Ďalej poznáme vzdialenosť *KF*, ktorá je 0,5 m a pravdaže vieme, že uhol *SKF* je pravý.

Aby sme však vedeli vypočítať polomer kružnice z trojuholníka *SKF*, musíme si ešte nejako vyjadriť jeho stranu *SK*. To nebude problémom, pretože vieme, že *PK* je 1 m a tiež, že *PS* je polomer kružnice – označme ho *r*. Z náčrtu je zrejmé, že $SK = 1 - r$. Teraz môžeme smelo zakomponovať Pytagorovu vetu:

$$r^2 = (1 - r)^2 + 0{,}5^2$$

$$r^2 = 1 - 2 \cdot r + r^2 + 0{,}25$$

po jednoduchej úprave dostávame: **r = 0,625 m = 5/8 m**

A teraz už okrem polomeru presne poznáme aj **polohu *S*: nachádza sa vnútri kocky presne 0,625 m kolmo od stredu steny *ADHE***.

<u>Bodovanie</u>:
správny výpočet aj vysvetlenie – 5b.; správny postup, ale zlý výpočet – do 3b. (podľa úrovne odôvodnenia a závažnosti chyby vo výpočte); za drobné chyby som strhával do 1b.; za umiestnenie stredu guľovej plochy iba približne dovnútra kocky – 0,5b.

p-mat

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat