Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

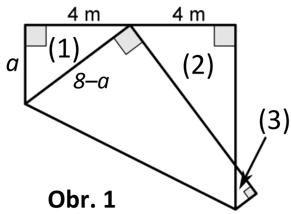
PIKOMAT

32. ročník www.pikomat.sk školský rok 2014/2015

Vzorové riešenia 2. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Trblietavá vlajka. *Opravoval Samuel „Samko“ Cibulka.*

Začínali sme so štvorcom so stranou 8 m. Potom sme preklopili ľavý spodný vrchol do stredu hornej strany. V tomto vzniknutom útvare sa určite niekde musia nachádzať pravé uhly z pôvodného štvorca. Tak ich nájdeme a vyznačíme – Obr. 1.

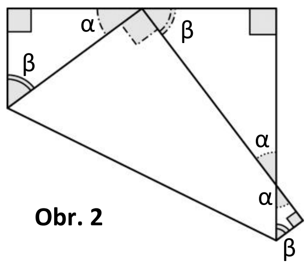


Obr. 1

Vidíme, že nám vznikli tri „pekné“ pravouhlé trojuholníky (očíslujeme si ich 1-2-3) a jeden „škaredý“ štvoruholník. Pravouhlé trojuholníky sú „pekné“ najmä preto, lebo vieme ľahko počítať ich obsahy. Jedna odvesna je totiž zároveň výškou trojuholníka vzhľadom na druhú odvesnu, a tak obsah je jednoducho polovica súčinu dĺžok odvesien.

Pozrime sa najskôr na trojuholník (1). Vieme, že jedna jeho odvesna má dĺžku 4 m. Označme si dĺžku druhej odvesny ako „*a*“. Tu si treba všimnúť, že **odvesna *a* a prepona tohto trojuholníka vznikli iba prehnutím ľavej strany pôvodného štvorca**. To znamená, že súčet dĺžok týchto dvoch strán musí byť 8 m, a tým pádom dĺžka prepony bude (8 – *a*) metrov – viď Obr. 1. V pravouhlých trojuholníkoch platí Pytagorova veta, tak si ju skúsme pre tento trojuholník napísať:

$$4^2 + a^2 = (8 - a)^2 = 64 - 16a + a^2$$



Obr. 2

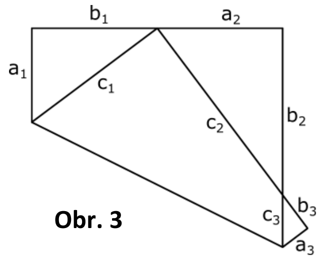
Člen a^2 sa nachádza na oboch stranách rovnice, a tak ho od oboch strán odčítame. Ostane nám jednoduchá rovnica, z ktorej dopočítame, že $a = 3$ m. Dĺžku odvesny potom už naozaj ľahko dopočítame ako $8 - a = 8 - 3 = 5$ m.

Teraz sa pozrime na uhly, ktoré sú v týchto troch trojuholníkoch. Začnime s trojuholníkom (1) a neznáme uhly označme α a β tak, ako na Obr. 2. Okrem toho vieme, že súčet uhlov v trojuholníku je 180°, a teda musí platiť, že 90° + α + β = 180°. Ďalej sa pozrime na tri uhly v strede hornej strany štvorca. Vieme, že ľavý z nich je uhol α, prostredný má 90° a súčet ich veľkostí musí byť 180°. Keď to porovnáme so situáciou v trojuholníku (1), vidíme, že tým pádom zvyšný z týchto uhlov musí mať tiež veľkosť β. No a keď sa pozrieme na trojuholník (2), tak opäť touto istou úvahou prídeme na to, že aj v ňom sa nachádzajú uhly α a β. Nakoniec si môžeme všimnúť, že dva bodkované uhly sú vrcholové, a teda budú mať oba veľkosť α, a tak posledný uhol v treťom trojuholníku bude mať opäť veľkosť β.

Čo sme práve zistili? Vieme, že všetky naše trojuholníky majú rovnaké uhly, teda sú podobné. To znamená, že dĺžky strán jedného trojuholníka sú vždy iba nejakým násobkom dĺžok strán druhého trojuholníka. Tomuto násobku sa hovorí *koeficient podobnosti*. Na Obr. 3 si označme strany trojuholníkov tak, aby platilo:

$$a_1 = k \cdot a_2 = l \cdot a_3 \qquad b_1 = k \cdot b_2 = l \cdot b_3 \qquad c_1 = k \cdot c_2 = l \cdot c_3$$

Vieme, že $a_2 = 4$, a že $a_1 = 3$. Odtiaľ máme $k = \frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{4}$, a tak si vieme dopočítať dĺžky strán v trojuholníku (2), nasledovne: $b_2 = \frac{b_1}{k} = 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$ a $c_2 = \frac{20}{3}$. Teraz vieme ľahko vypočítať b_3, pretože spolu s c_2 pôvodne tvorili spodnú stranu štvorca, a tak musia mať dokopy $c_2 + b_3 = 8$, takže $b_3 = 8 - \frac{20}{3} = \frac{4}{3}$. Pomocou toho vypočítame koeficient podobnosti medzi trojuholníkmi (1) a (3). $l = \frac{b_1}{b_3} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$. S týmto koeficientom ďalej vieme vypočítať $a_3 = \frac{a_1}{l} = \frac{3}{3} = 1$. Nakoniec obsah trojuholníka (3) už vypočítame ľahko: $S = \frac{a_3 b_3}{2} = \frac{1 \cdot \frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}\,\mathrm{m}^2$.



Obr. 3

Bodovanie: určenie strán prvého trojuholníka – 2b.; ukázanie, že trojuholníky sú podobné – 2b.; dopočítanie obsahu – 1b.

Úloha S2: Zvieracia klinika. *Opravoval Pavol „Tamarka“ Hronský.*

Nebudeme chodiť okolo horúcej kaše a po chvíli skúšania rovno povieme, že Dario si nenápadne môže obzrieť iba druhé oddelenie. Možných prechodov je niekoľko, jeden z nich vidíme na Obr. 1 – čísla označujú postupnosť krokov cez oddelenie.

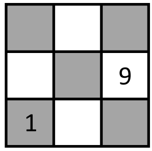
4	5	14	15
3	6	13	**16**
2	7	12	11
1	8	9	10

Obr. 1

Prečo ale nevieme urobiť podobnú cestu cez prvé a tretie oddelenie? Jedna z možností (pomerne zdĺhavá) je vyskúšať a zakresliť všetky možné cesty cez oddelenie, a potom ukázať, že naozaj žiadna z nich nevedie cez všetky miestnosti k východu. Samozrejme, takýto postup je úplne v poriadku a s patričnou dávkou slovného popisu som ho aj hodnotil ako správny.

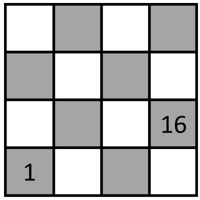
Predstavme si ale, že Dario narazí na oddelenie, ktoré nemá veľkosť 3×3 ani 4×4, ale napríklad 27×74 miestností. Každému je v tomto momente jasné, že nakreslenie všetkých možností, ako cez takéto oddelenie prejsť, by kvôli spotrebe papiera pripravilo o život hneď niekoľko stromov.

Preto sa radšej zamyslíme a skúsime nájsť kritérium, podľa ktorého ľahšie určíme, či sa cez dané oddelenie dá alebo nedá prejsť. Najprv si oddelenia vyfarbíme ako šachovnicu a označíme vchod a východ. Vchod bude mať číslo 1, lebo do tej miestnosti Dario vstupuje ako prvej; východ dostane také číslo, aký je počet všetkých miestností dokopy, pretože Dario chce cez každú prejsť práve raz a skončiť pri východe.



Obr. 2

Všimnime si nasledujúcu vec: **vždy, keď prechádzame z miestnosti do miestnosti, zmení sa jej farba**. Teda ak prvý krok viedol do sivej miestnosti, tak potom každý párny krok musí byť do bielej miestnosti a každý nepárny krok musí byť do sivej miestnosti.



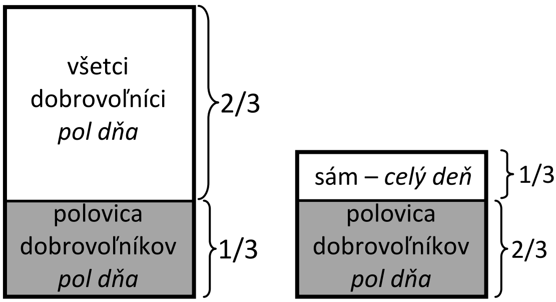
Obr. 3

A tu prichádzame k problému. V prípade 3×3 je posledný krok nepárny (9), a preto by sme tam potrebovali sivé políčko. Avšak je tam biele (Obr. 2). Podobne pre prípad na Obr. 3 by malo byť posledné políčko biele, keďže je párne (16), no je sivé. Preto nie je možné sa dostať do koncových miestností tak, aby sme žiadne políčko nevynechali, poprípade nevošli do niektorého viackrát.

Bodovanie: určenie, ktoré oddelenia sa dajú a ktoré sa nedajú prejsť – 3 × 1b.; vysvetlenie, prečo sa niektoré nedajú prejsť – 2b.

Úloha S3: Zber sagujas. *Opravovala Ľudmila „Ľudka“ Šimková.*

Doobeda zbierali všetci dobrovoľníci na väčšom políčku. Poobede na ňom zbierala už iba polovica dobrovoľníkov, a teda vyzbierali polovičnú časť ako doobeda. Spolu takto vyzbierali celé väčšie políčko. To znamená, že doobeda sa museli vyzbierať dve tretiny väčšieho políčka a poobede sa vyzbierala (polovica z toho, čiže) jedna tretina väčšieho políčka (Obr. 1 vľavo).



Obr. 1

Ďalej ak polovica dobrovoľníkov vyzbierala za pol dňa jednu tretinu väčšieho políčka, rovnako veľa musela vyzbierať druhá polovica dobrovoľníkov aj na menšom políčku (sivé časti na Obr. 1). Keďže druhé políčko je dvakrát menšie, tak plocha, ktorá na väčšom políčku znamenala 1/3 jeho rozlohy, bude na menšom políčku znamenať 2/3 jeho rozlohy. Polovica zberačov teda za pol dňa pozbierala dve tretiny z menšieho políčka (Obr. 1 vpravo). Ostala už iba jedna tretina menšieho políčka, ktorú celý ďalší deň zbieral Leo sám (Obr. 1 vpravo).

Zistili sme, že Leo pozbieral za jeden deň jednu tretinu menšieho políčka. Celé menšie políčko by potom pozbieral za 3 dni a väčšie políčko za 6 dní. **Dokopy by Leo sám zbieral obe políčka 9 dní.** Všetci dobrovoľníci za jeden deň pozbierali toľko, čo by Leovi samému trvalo 8 dní. To znamená, že **všetkých dobrovoľníkov dokopy bolo 8.**

Bodovanie: menšie postrehy, ktoré sa využívali pri riešení – do 2b.; väčšie nepresnosti pri inak správnom riešení – mínus 0,5 až 1b.

Úloha S4: Nuda v kobke. *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula.*

Vlastnosť, ktorá hovorí o tom, či je číslo párne alebo nepárne, sa nazýva jeho *parita*. Ďalej budeme „párne číslo“ skracovať ako „(P)“ a „nepárne číslo“ ako „(N)“. Okrem toho si pripomeňme jednoduché pravidlá, ako sa správa parita čísel pri sčitovaní. Vieme, že: (P)+(P) = (P); (P)+(N) = (N); a (N)+(N) = (P). Pre nás však bude výhodnejšie si z toho zapamätať toto: **ak k nejakému číslu pričítame (N), tak jeho parita sa zmení; ak k nejakému číslu pričítame (P), tak jeho parita ostane nezmenená**.

Na začiatok si zoberme prípad, že by sme mali len jednu kocku. Kocka má 6 stien, na 3 z nich sú (P) a na 3 sú (N). Takže tu je jasné, že je polovičná šanca (50%), že padne párne číslo, a polovičná šanca (50%), že nepárne číslo.

Poďme sa pozrieť na 2 kocky. Rozoberieme si to postupne:
1) ak na prvej kocke padlo (P): ďalej je 50% šanca, že na druhej padne tiež (P) a súčet ostane (P); a 50% šanca, že na druhej kocke padne (N) a súčet zmení paritu na (N).
2) ak na prvej kocke padlo (N): opäť je 50% šanca, že na druhej padne (P) a súčet ostane (N); a 50% šanca, že na druhej padne (N) a súčet zmení paritu na (P).

Vidíme, že nech na prvej kocke padlo čokoľvek, tak vždy bola pri hode druhou kockou 50% šanca, že sa parita súčtu zmení na opačnú, a 50% šanca, že parita súčtu ostane nezmenená. To vlastne znamená, že **je úplne jedno, čo padlo na prvej kocke, lebo aj tak to ešte druhá kocka s 50% šancou zmení**. Takže sme prišli na to, že pri hode dvoma kockami sú šance na (P) súčet a (N) súčet rovnaké – 50% a 50%.

Čo, ak je kociek viac? Nuž predstavme si, že najprv hodíme všetkými okrem jednej, a potom tou poslednou. Vidíme, že tu bude platiť niečo veľmi podobné ako pri dvoch kockách:
1) ak súčet na všetkých ostatných kockách bol (P): ďalej je 50% šanca, že pričítanie poslednej kocky túto paritu zmení na (N); a 50% šanca, že pričítanie poslednej kocky túto paritu nezmení.
2) ak súčet na všetkých ostatných kockách bol (N): opäť je 50% šanca, že táto parita sa zmení na (P); a 50% šanca, že ostane nezmenená.

Rovnako ako v prípade dvoch kociek, aj tu si môžeme všimnúť, že vlastne **je úplne jedno, aká bola parita súčtu na všetkých ostatných kockách, lebo aj tak ju ešte posledná kocka s 50% šancou zmení**.

Takže správna odpoveď znie: **Pre ľubovoľný počet kociek je šanca, že padne párny a aj šanca, že padne nepárny súčet rovnaká, a to 50%.**

Bodovanie: správna odpoveď – 1b.; znázornenie, že to platí pre niektoré konkrétne počty kociek – 1,5b.; vysvetlenie, prečo to platí aj pre iné počty kociek – 2,5b.

Poznámka:
Zaujímavé je, že vôbec nepotrebujeme skúmať, s akými pravdepodobnosťami sa vyskytuje (P) alebo (N) súčet na tých „všetkých ostatných“ kockách. Úplne nám stačí, ak vieme, že na konci ešte pričítame jeden ďalší hod kockou, ktorý túto paritu s 50% šancou

zmení na opačnú, alebo s 50% šancou nechá nezmenenú. Dokonca si predstavme situáciu, že by všetky kocky okrem jednej boli falošné a napríklad na nich padali vždy iba párne čísla. Takže ten súčet na „všetkých ostatných“ kockách by bol vždy párny. Ale ani to nevadí! Stačí, ak máme aspoň jednu „spravodlivú“ kocku, ktorá na konci paritu súčtu s 50% šancou zmení alebo s 50% šancou nechá nezmenenú.

Úloha S5: Otvorenie dverí. *Opravoval Michal „Kesy“ Kesely.*

Prvočísla majú jednu nepríjemnú vlastnosť: hoci vieme, že ich je nekonečne veľa, tak povedať o veľkom čísle, či je prvočíslom alebo nie, je pomerne náročné. V skutočnosti všetky prvočísla ani nepoznáme. Preto vypisovanie všetkých možností asi nebude tou správnou cestou. Jednoducho preto, lebo ani nevieme, čo to tie „všetky možnosti“ sú. Musíme vymyslieť niečo lepšie.

Pripočítanie čísla 12 znamená, že z párneho čísla dostaneme opäť iba párne a z nepárneho opäť nepárne. Párne prvočíslo existuje len jedno jediné – dvojka – takže tu ďaleko nezájdeme. Tým pádom sa naša postupnosť musí skladať iba z nepárnych čísel.

Teraz sa pozrime, čo spraví pripočítanie 12 s cifrou na mieste jednotiek. Ak číslo končí cifrou 1, po pripočítaní 12 bude končiť cifrou 3. Po ďalšom pripočítaní 12 bude končiť cifrou 5, po ešte ďalšom cifrou 7, potom cifrou 9, no a po ešte ďalšom pripočítaní 12 bude končiť znova cifrou 1 – a takto stále dokola.

Zároveň si treba uvedomiť, že žiadne prvočíslo – okrem päťky samotnej – nemôže končiť cifrou 5, pretože by bolo deliteľné číslom 5, a teda by nebolo prvočíslom. Tým pádom ak nepripustíme čísla končiace päťkou, tak vidíme, že najdlhšia vyhovujúca postupnosť môže mať najviac 4 členy – končiace ciframi 7–9–1–3.

Avšak pozor! Ešte si môžeme vypomôcť číslom 5 samotným, keď ho zaradíme ako prvý člen postupnosti. Pripočítavaním 12-tky potom dostaneme postupnosť: **5–17–29–41–53**. Ešte skontrolujeme, či sú všetky tieto čísla prvočíla, a potom môžeme spokojne prehlásiť, že **sme našli vyhovujúcu postupnosť 5 prvočísel**. Na základe vyššie napísaných úvah vidíme, že je to najdlhšia možná postupnosť. **Kód, ktorý majú Ritta s Dariom zadať, je 517294153.**

Bodovanie: správny výsledok – 2b.; postup – 3b.