Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

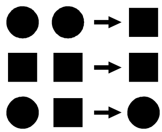
32. ročník www.pikomat.sk školský rok 2014/2015

Vzorové riešenia 3. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Hra o čokoládu. *Opravovala Zuzana „Zuzka“ Frankovská.*

Na úvod jedno možno nové slovo: vlastnosť, ktorá hovorí o tom, či je číslo párne alebo nepárne, sa nazýva jeho *parita*.

Strážca Marcello vie s útvarmi robiť tri operácie, ktoré vidíme aj na Obr. 1: môže dva kruhy nahradiť jedným štvorcom; môže dva štvorce nahradiť jedným štvorcom; môže jeden štvorec a jeden kruh nahradiť jedným kruhom.



Obr. 1

Vidíme, že každým krokom sa počet štvorcov buď zvýši o 1, alebo zníži o 1. To ale až také veľmi zaujímavé nie je. Oveľa zaujímavejšie je to, čo sa deje s počtom kruhov! Počet kruhov sa buď zníži o 2, alebo sa nezmení. Z toho vyplýva, že **parita počtu kruhov sa pri žiadnej operácii nemení**.

Enriko chce, aby na konci zostal na papieri štvorec, a teda aby tam bolo 0 kruhov. 0 je párne číslo. To znamená, že aj **na začiatku musí byť na papieri párny počet kruhov**.

Keďže celkový počet všetkých útvarov pri každej operácii klesá o 1 a keďže máme operácie pre ľubovoľnú dvojicu útvarov, tak si môžeme byť istí, že hra sa vždy dopracuje až do stavu, kedy ostane jeden jediný útvar.

Enriko určite vyhrá, ak na začiatku nakreslí na papier párny počet kruhov.

Bodovanie:
úplné riešenie využívajúce paritu počtu kruhov – 5b.; ak nebolo rátané s tým, že Marcello si môže svojvoľne vyberať, čo bude robiť – max 3b.; len skúšanie s konkrétnymi počtami kruhov a štvorcov, prípadne skúšanie s menším počtom útvarov – 1,5 až 2b.

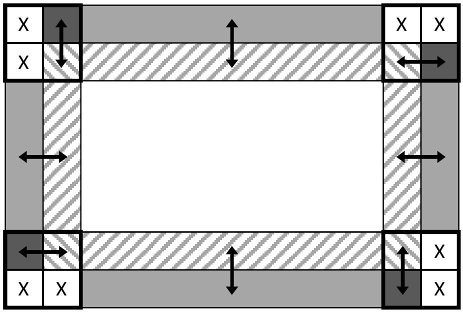
Úloha S2: Čarovné podložky. *Opravoval Roman Kluvanec.*

Naším cieľom je nájsť všetky také obdĺžniky, ktoré majú rovnaký počet *vonkajších* a *vnútorných* štvorčekov. Alebo, povedané skoro to isté trochu inými slovami: Ku každému štvorčeku na obvode musí prislúchať presne jeden štvorček vo vnútri.

To je zaujímavá formulácia, lebo nám pri nej hneď napadne: tak teda **skúsme „popárovať“ vonkajšie štvorčeky s vnútornými!**

Pozrime sa najprv na všeobecný obdĺžnik a hlavne na jeho **prvé dve vrstvy od kraja**. Keď sa pokúsime v nich povytvárať dvojice medzi vnútornými a vonkajšími štvorčekmi, tak rýchlo vypozorujeme, že v rohoch „to akosi nie celkom funguje“. Na Obr. 1 vidíme, že pokiaľ sa obmedzujeme na dve krajné vrstvy, tak nám **vždy ostane presne 8 vonkajších štvorčekov nespárovaných**, a to bez ohľadu na rozmery obdĺžnika.

Čo to pre nás znamená? Nuž znamená to, že týchto 8 štvorčekov si bude musieť nájsť svoju dvojicu vo zvyšnej vnútornej časti obdĺžnika. Takže riešením úlohy budú všetky také **obdĺžniky, ktoré majú v tejto vnútornej časti (viac ako 2 vrstvy od kraja) <u>presne 8</u> štvorčekov**.



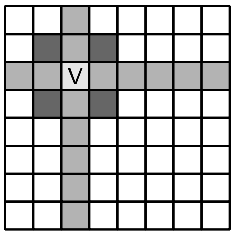
Obr. 1

Vnútorné časti s obsahom 8 štvorčekov môžu mať jedine 1×8 alebo 2×4 štvorčeky. Celé obdĺžniky budú mať potom rozmery **5×12 alebo 6×8 štvorčekov**.

<u>Bodovanie</u>:
dva správne výsledky – 2 × 1b.; postup, akým ste sa k výsledkom dopracovali – 1b.; dôkaz, že žiadne iné riešenie neexistuje – 2b.

<u>Úloha S3: Bezpečnostný systém. *Opravovala Ľudmila „Ľudka“ Šimková.*</u>

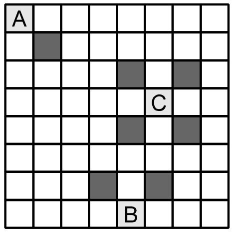
Skúsme si na šachovnicu rozostaviť dve veže tak, aby sa neohrozovali. Prvú vežu môžeme umiestniť na ľubovoľné políčko šachovnice. Potom zafarbime políčka, ktoré ohrozuje. Sú to všetky políčka v riadku a v stĺpci, v ktorom sa veža nachádza (na Obr. 1 svetlosivá farba). Ak druhú vežu umiestnime na ľubovoľné ešte nezafarbené políčko, tak určite nebude ohrozovať prvú vežu. Nebude sa totiž nachádzať v tom istom stĺpci ani v tom istom riadku. Na zafarbené políčko ju umiestniť nemôžeme, pretože by sa veže navzájom ohrozovali. Teraz spočítajme, koľkými spôsobmi vieme takto dve veže umiestniť na šachovnicu.



Obr. 1

Máme 64 možností, kam umiestniť prvú vežu. Nech ju umiestnime kamkoľvek, vždy bude ohrozovať zvyšných 7 políčok vo svojom riadku a zvyšných 7 vo svojom stĺpci. Druhú vežu tým pádom môžeme umiestniť na ľubovoľné zo 64–15 = 49 políčok, ktoré ostali neohrozené. Ku každému zo 64 umiestnení prvej veže máme 49 umiestnení druhej veže, a preto **počet všetkých takýchto umiestnení je 64·49 = 3136**. Ak by sme veže nerozlišovali, tak by sme toto číslo mali ešte vydeliť 2, lebo teraz sme zarátali aj situácie, kedy sú len „prvá“ a „druhá“ veža vymenené medzi sebou. Zo zadania však nebolo celkom zrejmé, či šéfko svojich robotov takto rozlišuje, a tak som uznávala oba výsledky.

Pozrime sa na druhú časť úlohy, kde máme rozostaviť jednu vežu a jedného kráľa. Opäť ako prvú na šachovnicu umiestnime vežu. Už vieme, že veža na ľubovoľnom políčku bude ohrozovať všetky zvyšné políčka vo svojom riadku a stĺpci. Tentokrát však kráľ môže ohroziť vežu aj z takého políčka, ktoré veža neohrozuje. Preto musíme zafarbiť ešte tie políčka, z ktorých vie kráľ ohroziť vežu (na Obr. 1 tmavšou farbou). Sú to tie isté políčka, ktoré by ohrozoval kráľ, keby bol na mieste veže. Problém je v tom, že počet týchto políčok nie je vždy rovnaký. Ako vidno na Obr. 2, závisí to od toho, kam sme umiestnili vežu. Musíme preto rozobrať tri prípady tak, ako sú označené na Obr. 2:



Obr. 2

A) Ak dáme vežu na jedno zo 4 rohových políčok: Vtedy môžeme kráľa umiestniť na jedno zo 64–15–1 = 48 políčok. Tým pádom je počet možností, ako rozostaviť obe figúrky: 4·48 = **192**.
B) Ak dáme vežu na jedno z 24 obvodových (ale nie rohových) políčok: Vtedy môžeme kráľa umiestniť na jedno zo 64–15–2 = 47 políčok. Takže počet možností je 24·47 = **1128**.
C) Ak dáme vežu na jedno z 36 vnútorných políčok: Vtedy môžeme kráľa umiestniť na jedno zo 64–15–4 = 45 políčok. Počet možností je 36·45 = **1620**.

Vežu a kráľa môžeme na šachovnicu rozmiestniť 192 + 1128 + 1620 = 2940 spôsobmi.

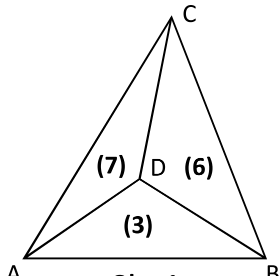
Bodovanie:
správne výsledky bez postupu – 2b.; ak ste zle pochopili zadanie, ale použili ste postup, ktorý by sa bol dal použiť aj pri správnom pochopení – 2 až 3b.; rozdelenie druhej časti úlohy na 3 prípady – 1b.

Úloha S4: Nákres pozemkov. *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula.*

Aby všetky časti, za ktoré šéfko platí, vôbec mohli byť štvoruholníky, tak sa musí jeden vrchol nachádzať vnútri trojuholníka tvoreného zvyšnými 3 vrcholmi. Musí to tak byť preto, lebo v opačnom prípade by sa aspoň jednému „štvoruholníku“ dve jeho strany pretli navzájom, a teda by ten útvar vlastne ani nebol štvoruholníkom. Na Obr. 1 je jeden konkrétny prípad, ako približne mohli byť vrcholy rozmiestnené (je jedno, ktorý zo 4 vrcholov dáme do stredu – ja som si náhodne zvolil vrchol *D*).

Teraz už vieme, ako pozemok vyzerá, tak sa poďme pozrieť na jeho obsah. Zo zadania máme tieto tri informácie: obsah *ABCD* je 9 ha; obsah *ABDC* je 10 ha; obsah *ADBC* je 13 ha. Na obrázku vidíme, že každý z týchto štvoruholníkov sa skladá z dvoch trojuholníkov, takže si môžeme tieto 3 obsahy zo zadania zapísať aj ako súčet oných menších trojuholníkov:

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = 9$ ha,
$S_{ABDC} = S_{ADC} + S_{ABD} = 10$ ha,
$S_{ADBC} = S_{BCD} + S_{ADC} = 13$ ha.



Obr. 1

Všimnime si, že v tomto zápise sa každý trojuholník vyskytuje presne dvakrát. To znamená, že ak tieto tri rovnice sčítame dokopy, dostaneme na ľavej strane dvakrát obsah celého pozemku a na pravej strane 9+10+13 = 32 ha. Čiže $2 \cdot S_{ABC} = 32$ ha, a teda $\boldsymbol{S_{ABC} = 16}$ **ha**.

Pomocou tohto výsledku si tiež vieme dopočítať obsahy jednotlivých menších trojuholníkov – vždy iba od obsahu celého pozemku odčítame jeden zo štvoruholníkov:

$S_{ABD} = S_{ABC} - S_{ADBC} = 16 - 13 = 3$ ha,
$S_{BCD} = S_{ABC} - S_{ABDC} = 16 - 10 = 6$ ha,
$S_{ADC} = S_{ABC} - S_{ABCD} = 16 - 9 = 7$ ha.

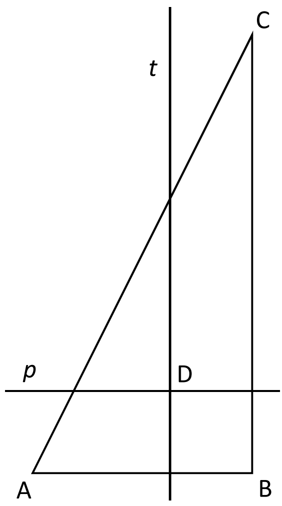
Teraz, keď už poznáme plochu celého pozemku aj plochy jednotlivých častí, hor sa rysovať! Keďže jediné, čo máme zadané, sú plochy, tak takýto pozemok sa bude dať vytvoriť nespočetne veľa možnosťami. Skúsime si preto vybrať nejakú podľa možností jednoduchú. Okrem toho, aby sme nemuseli narysovať ozajstný pozemok, tak všetky „hektáre“ budeme odteraz považovať za „centimetre štvorcové“. Mimochom: vedel/a by si povedať, v akej *mierke* (*koľkokrát menší ako realita)* tým pádom bude náš nákres?

Trojuholník *ABC* má mať 16 cm^2. Aby sa nám ľahko rysovalo, tak si zvolíme, že bude pravouhlý s odvesnami dlhými $|AB| = 4$ cm a $|BC| = 8$ cm. Teraz už potrebujeme iba určiť polohu bodu *D*. Tu sa musíme postarať, aby boli súčasne splnené dve podmienky: obsah trojuholníka *ABD* musí byť 3 cm^2 a obsah *BCD* musí byť 6 cm^2. Všimni si, že ak sa postaráme o tieto dva obsahy, tak potom tretí obsah (trojuholníka *ADC*) bude „automaticky“ tiež správny. Prečo? Lebo vznikne ako zvyšok z celkovej plochy, ktorý ostane po vytvorení prvých dvoch trojuholníkov, a teda bude mať obsah 16–3–6 = 7 cm^2.

Zapíšme si obsahy trojuholníkov *ABD* a *BCD* pomocou výšok na strany $|AB|$ resp. $|BC|$:

$$S_{ABD} = \frac{|AB| \cdot v_{AB}}{2} = 3\ cm^2, \qquad S_{BCD} = \frac{|BC| \cdot v_{BC}}{2} = 6\ cm^2.$$

Keďže dĺžky $|AB|$ aj $|BC|$ poznáme, tak z týchto zápisov už jednoducho dopočítame obe výšky. Dostaneme $v_{AB} = 1{,}5$ cm; $v_{BC} = 1{,}5$ cm. Takže to znamená, že bod *D* sa musí nachádzať 1,5 cm vzdialený od priamky *AB* a tiež 1,5 cm vzdialený od priamky *BC* (a pravdaže zároveň vnútri trojuholníka *ABC*). Narysujeme teda priamku *p* rovnobežnú s *AB* vo vzdialenosti 1,5 cm od *AB*, a potom priamku *t* rovnobežnú s *BC* vo vzdialenosti 1,5 cm od *BC*. Tam, kde sa tieto dve priamky pretnú, vznikne nový bod *D*. To, že je na priesečníku daných 2 priamok zaručí, že obsah trojuholníkov *ABD* aj *BCD* (a tým pádom aj trojuholníka *ADC*) bude správny.



Obr. 2

Bodovanie:

určenie tvaru šéfkovho pozemku – 1b.; vypočítanie obsahu celého pozemku a jeho jednotlivých častí – 1,5b.; narysovanie zmenšeniny pozemku – 1b.; zdôvodnenie zvolených rozmerov – 1,5b.

Úloha S5: Predavač hlavolamov. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Najskôr vyriešime úlohu pre jednociferné čísla. Spomenieme si na malú násobilku a presvedčíme sa, že všetky násobky čísla 9 (od 9 po 81) majú ciferný súčet 9. Keď už tú násobilku máme pred očami, všimneme si aj ďalšiu vlastnosť násobkov 9. Keď si vezmeme nejaké dva po sebe idúce násobky, tak číslica na mieste jednotiek prvého čísla a číslica na mieste desiatok druhého čísla dávajú súčet 10. Napr. $2\underline{7}$ a $\underline{3}6$, alebo $7\underline{2}$ a $\underline{8}1$. Ak by sme si ako druhý z násobkov vybrali nejaký väčší násobok (napr. $2\underline{7}$ a $\underline{6}3$), tak pri sčítaní spomínaných (podčiarknutých) cifier by sme dostali číslo väčšie ako 10. Táto vlastnosť nám neskôr pomôže pri riešení úlohy.

```
 ABCD
   ·9
    EF  (E+F=9)
   GH   (G+H=9)
  JK    (J+K=9)
 LM     (L+M=9)
---------
 VWXYZ
```

Obr. 1

Máme teda číslo so stúpajúcimi ciframi a máme ho vynásobiť 9. Nateraz si predstavme nejaké 4-ciferné: môžeme ho zapísať ako ABCD, pričom A až D sú rôzne cifry, väčšie než 0 a stúpajúce smerom doprava. Poďme sa pozrieť, čo sa s týmto číslom stane po vynásobení 9.

Násobíme klasicky pod sebou – Obr. 1. Každý medzivýsledok EF, GH, JK, LM je nejaký násobok 9 z malej násobilky, a my tým pádom už vieme, že jeho ciferný súčet je 9. Posledná cifra výsledku (Z) sa bude rovnať F. Predposledná cifra výsledku (Y) bude E+H. Tu však dôjde ku prechodu cez 10. Prečo? Lebo kvôli usporiadaniu cifier vieme, že C < D. Tým pádom GH je menší násobok 9 ako EF a podľa vlastnosti z prvého odseku musí platiť, že E+H ≥ 10. Preto cifra Y bude Y = E+H–10. Tretia cifra od konca (X) by mala byť G+K, ale tiež tu z toho istého dôvodu dôjde ku prechodu cez 10, a zároveň ešte pripíšeme zvyšok z predošlého sčítania v podobe +1. Platí teda, že X = G+K–10+1 = G+K–9. Rovnakú úvahu použijeme aj pri určovaní cifry W = J+M–9. Nakoniec nám ostane prvá cifra výsledku V = L+1, ku ktorej sa pridáva iba zvyšok 1. K prechodu cez 10 nemôže dôjsť, lebo LM (keďže vzniklo ako A·9) mohlo byť najviac 81. Dokonca pri viac-cifernom čísle musí byť LM ešte menšie ako 81.

Fajn, máme jednotlivé cifry výsledku, zapísané ako (L+1), (J+M–9), (G+K–9), (E+H–10), (F). Ciferný súčet výsledku je teda (L+1)+(J+M–9)+(G+K–9)+(E+H–10)+(F). Preskupíme písmenká a dostávame: (L+M)+(J+K)+(G+H)+(E+F)+(1–9–9–10). A keďže súčty písmeniek v zátvorkách poznáme, súčet sa zjednoduší na 9+9+9+9+(1–9–9–10) = 9. Pre ľubovoľné 4-ciferné číslo so stúpajúcimi ciframi platí, že po vynásobení 9 bude jeho ciferný súčet 9.

Ale pozor, tu postup nekončí. Myslené číslo nemuselo byť 4-ciferné, mohlo by mať kľudne *n* cifier. My však vieme použiť princíp násobenia „pod sebou“ pre ľubovoľne dlhé číslo. Pri *n*-cifernom čísle dostaneme práve *n* medzivýsledkov a pri sčitovaní týchto medzivýsledkov budeme (*n*–1)-krát sčitovať dve cifry pod sebou. Ako sme videli v predošlom prípade, každé takéto sčítanie spôsobí prechod cez 10, čím sa od výsledného ciferného súčtu odráta 10 a pripočíta sa 1 v podobe zvyšku ku nasledujúcemu sčítaniu. V konečnom dôsledku teda cifry jednotlivých medzivýsledkov dávajú súčet *n*·9, ale zároveň pri sčítavaní medzivýsledkov dôjde ku práve (*n*–1) prechodom cez 10, čiže sa odráta (*n*–1)·9. Šikovný čitateľ si uvedomí, že *n*·9 – (*n*–1)·9 = 9.

Túto úlohu bolo možné riešiť ešte jedným veľmi zaujímavým spôsobom, a tak si tu ukážeme aj ten. Čo ak by nám namiesto násobenia 9 „pod sebou“ napadla geniálna myšlienka, násobenie 9 prepísať ako: DCBA · 9 = DCBA · 10 – DCBA. Násobenie desiatimi je predsa oveľa jednoduchšie – iba pripíšeme nulu na koniec – a tak nám ostáva iba napísať si pod seba odčítanie dvoch čísel a pustiť sa do roboty – Obr. 2.

$$\begin{array}{r} \mathrm{DCBA0} \\ -\ \mathrm{DCBA} \\ \hline \mathrm{EFGHJ} \end{array}$$

Obr. 2

Posledná cifra výsledku je J = 10–A. Je to preto, lebo A > 0 (inak by nemohlo byť podľa zadania A > B). Zároveň sme spôsobili prvý a posledný prechod cez 10, takže pri nasledujúcej cifre si nezabudneme zarátať prenesenú +1. Preto H = A–(B+1). V tomto prípade už ku prechodu cez 10 nedochádza, lebo platí A > B. Ďalšia cifra je G = B–C, potom F = C–D, a nakoniec E = D. Odčítania B–C a C–D sú bez prechodu cez 10 kvôli podmienke v zadaní.

Takže jednotlivé cifry výsledku sme dostali ako (D), (C–D), (B–C), (A–(B+1)), (10–A). Nebudeme dlho otáľať a zistíme ciferný súčet: D+(C–D)+(B–C)+(A–B–1)+(10–A) = = (D–D)+(C–C)+(B–B)+(A–A)+10–1 = 9. Celá sada písmeniek sa nám navzájom poodčitovala a zostalo 9.

Ako to bude fungovať pri číslach s iným počtom cifier než 4? Stačí naše odčítanie „useknúť“ vo vhodnom mieste, alebo, naopak, pridať ešte pár písmen zľava (áno, aj preto sú cifry v prvom príklade označené DCBA a nie ABCD – aby sa ľahšie pridávali). Uvedieme si 4 iné príklady ciferných súčtov:

A · 9 = (A–1) + (10–A)
BA · 9 = (B) + (A–B–1) + (10–A)
CBA · 9 = (C) + (B–C) + (A–B–1) + (10–A)
EDCBA · 9 = (E) + (D–E) + (C–D) + (B–C) + (A–B–1) + (10–A)

Pozorný čitateľ si už isto všimol zákonitosti vytvárania zátvoriek, ako aj nezvratný osud písmeniek, ktoré sa navzájom vynulujú, zanechávajúc vždy výsledok 9. A preto **predavač vie, že nech si Dario vyberie akékoľvek číslo v súlade so zadaním, po vynásobení 9 bude ciferný súčet výsledku určite 9**.

Bodovanie:
akékoľvek riešenie, z ktorého je jasné, že to vždy platí – 5b.; riešenie len pre 4-ciferné čísla – 4b.; správny nápad, ktorý by bol viedol ku riešeniu, len nebol rozvinutý – 3b.; výsledok s náznakom uvažovania o postupe – 2b.; iba výsledok bez postupu – 1b.; za nejasnosti alebo fajn nápady som pridával / uberal 0,5b.