Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

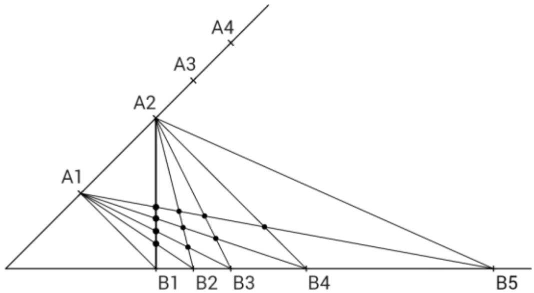
PIKOMAT

33. ročník www.pikomat.sk školský rok 2015/2016

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Pálky. *Opravovala Ľudmila „Ľudka“ Šimková.*

Štyri dierky na paličke A a päť dierok na paličke B si označíme ako na Obr. 1. Aby sme žiadne dve dierky nezabudli spojiť, budeme vypletať nasledovne: Prvú dierku na paličke A spojíme so všetkými dierkami na paličke B. Potom prejdeme k druhej dierke na A a opäť ju spojíme so všetkými dierkami na B, a tak ďalej. Pri tom budeme sledovať, koľko prekrížení nám vznikne s každým novým vláknom.



Obr. 1

Začneme dierkou A1 a postupne pridáme vlákna do všetkých dierok na paličke B. Vidíme, že zatiaľ sa nič nekrižuje. Keď teraz pridáme vlákno z A2 do B1, vzniknú 4 prekríženia (Obr. 1). Nové vlákno totiž prekríži všetky vlákna, ktoré idú z A1 do druhej a „neskoršej“ dierky na B, teda tie, ktoré nejdú do prvej dierky. Tých je 5–1=4. Nasleduje vlákno A2-B2. Toto prekríži tie vlákna z A1, ktoré nejdú do prvých dvoch dierok na B. To sú 5–2=3 vlákna. Vlákno A2-B3 nám prekríži už iba tie, ktoré nejdú do prvých troch dierok na B, čiže 5–3=2 vlákna. Ďalšie vlákno A2-B4 prekríži 5–4=1 vlákno, no a posledné vlákno A2-B5 prekríži 5–5=0 vlákien.

Presuňme sa k dierke A3. Vlákno A3-B1 už križuje vlákna vychádzajúce z A1 aj vlákna vychádzajúce z A2. Podobne ako v predošlom odseku, prekríži všetky tie, ktoré nejdú do prvej dierky na B. Teda iba zopakujeme výpočet z predošlého odseku, ale tentokrát pre obe dierky A1 aj A2. Pre každú to budú 5–1=4 vlákna, takže dokopy vznikne 2·4=8 prekrížení. Vlákno A3-B2 prekríži tie, ktoré nejdú do prvých dvoch dierok na B. Opäť z A1 a A2 to je rovnaký počet 5–2=3, a teda vznikne 2·3=6 prekrížení. Ako to celé bude pokračovať, vidíme v Tabuľke 1.

Vlákna z	Počet prekrížení	
A1	0	0·(4+3+2+1+0)
A2	1·4+1·3+1·2+1·1+1·0	1·(4+3+2+1+0)
A3	2·4+2·3+2·2+2·1+2·0	2·(4+3+2+1+0)
A4	3·4+3·3+3·2+3·1+3·0	3·(4+3+2+1+0)

Tabuľka 1

Keď postupne vypletáme dierku A2, tak prvým vláknom nám vzniknú 4 prekríženia a každým ďalším pridaným vláknom tento počet klesne o 1 (viď druhý riadok Tabuľky 1). Pri vypletaní A3 už pretíname vlákna predošlých dvoch vypletených dierok, preto riadok A3 je dvojnásobkom prvého riadku. Podobne pri vypletaní A4 už sú vypletené tri predošlé dierky, a tak je riadok A4 trojnásobkom prvého riadku.

Ostáva už len spočítať, koľkokrát sa v celkovom súčte nachádza zátvorka (4+3+2+1+0). Dostávame teda počet všetkých prekrížení (0+1+2+3)·(4+3+2+1+0) = 6·10 = **60 prekrížení**.

V druhom prípade – keby bolo na jednom ramene 20 a na druhom 30 dierok – budeme postupovať úplne rovnako, preto uvádzam už iba výslednú tabuľku (Tabuľka 2). Počet všetkých prekrížení bude:

(0+1+2+...+27+28+29) · (19+18+17+...+2+1+0) = 435 · 190 = **82 650 prekrížení**.

Vlákna z	Počet prekrížení
A1	0 · (19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1+0)
A2	1 · (19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1+0)
A3	2 · (19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1+0)
...	...
A30	29 · (19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1+0)

Tabuľka 2

Bodovanie:

výsledok pre paličku 5×4 – 1b.; postup – 3,5b. podľa toho, ako dobre sa dal zovšeobecniť na paličku väčšej veľkosti; správne sčítanie – 0,5b.

Úloha S2: Bolesť hlavy. *Opravovala Michaela „Miški“ Zatrochová.*

Popísať víťaznú stratégiu v tejto hre ste skúšali rôznymi spôsobmi a mnohí ste skutočne našli aj pomerne zložité stratégie, ktoré boli správne. V tomto vzorovom riešení si však ukážeme tú pravdepodobne najpriamejšiu a najjednoduchšiu víťaznú stratégiu.

Je to stratégia pre začínajúceho hráča a spočíva v tom, **v prvom ťahu čokoládu 3×6 rozlomiť na dve rovnaké časti 3×3**. Ďalej bude začínajúci hráč už iba opakovať ťahy svojho súpera – čokoľvek súper spraví na jednej polovici čokolády, začínajúci hráč to zopakuje na druhej polovici. Tým pádom nech súper spraví akýkoľvek ne-prehrávajúci ťah, tak aj začínajúci hráč môže zopakovať rovnaký ne-prehrávajúci ťah na druhej polovici čokolády. Skôr či neskôr súperovi neostane iná možnosť, ako vytvoriť štvorček 1×1, a teda prehrať.

Bodovanie:

popis stratégie – 3b.; vysvetlenie, ako a prečo funguje – 2b.

Úloha S3: Dženy. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Na celú cestu treba 2 plné nádrže. Dženy má len jednu, takže **sama cestu nezvládne**. Čo ak by si zobrala na pomoc jedného kamaráta? Teraz majú dokopy 2 nádrže. Lenže spolu míňajú aj 2-krát viac benzínu. Pokiaľ kamarát neodovzdá celú svoju nádrž Dženy hneď na štarte (čo sa nedá, lebo Dženy nemá miesto pre viac benzínu), začne z nej míňať aj on a dokopy teda pre Dženy neostanú 2 plné nádrže na prejdenie cesty. Takže **jeden kamarát nestačí**.

Skúsme Dženy dopriať dvoch kamarátov s autami. Všetci dokopy teraz začínajú s 3 nádržami benzínu, pričom vieme, že Dženy bude potrebovať práve 2 z nich. Navyše nie je ťažké si uvedomiť, že aspoň jeden kamarát bude musieť docestovať aspoň do polovice cesty spolu s Dženy, aby jej tam dolial benzín doplna a ona mohla pokračovať sama až do cieľa. Dženy totiž od polcesty spotrebuje celú nádrž a je celkom výhodné dodať jej ju, aby mohla pokračovať sama bez ďalších áut, ktoré by už zbytočne pálili benzín. Keď si to teraz spočítame, Dženy spotrebuje 2 nádrže, jeden z jej kamarátov spotrebuje 1 nádrž (na spomínanú cestu do polovice trasy) a to už sú 3 nádrže. Lenže my sme si zavolali aj druhého kamaráta, ktorý ihneď po vyštartovaní tiež čosi spotrebuje, a to už bude nad limit 3 nádrží. Keby nevyštartoval, tak by sme mali len 1 kamaráta, a to vieme, že nestačí. Takže **ani dvaja kamaráti nestačia**.

Všimnime si, že zatiaľ vôbec nehovoríme o tom, kde presne by sa koľko benzínu prelievalo. Jednoducho dokážeme vylúčiť riešenie s menej ako 3 kamarátmi aj bez tejto informácie.

Pridajme tretieho kamaráta. Tu už nie je ťažké vymyslieť konkrétny spôsob, ako musia poprelievať benzín, aby Dženy dorazila až do cieľa. Napríklad tak, že v štvrtine cesty dvaja z kamarátov ostanú stáť a venujú svoju zvyšnú polovicu nádrže Dženy a tretiemu kamarátovi. Títo dvaja môžu pokračovať ďalej s plnou nádržou. Po ďalšej štvrtine cesty (už sú obaja v polovici) majú znova poloprázdne nádrže, a tak sa kamarát obetuje a svoju polovicu preleje Dženy, ktorá s plnou nádržou zvládne cestu až do cieľa.

Našli sme riešenie pre 3 kamarátov a zároveň sme ukázali, že s menším počtom kamarátov to nejde. Viaceré riešenia mali práve ten nedostatok, že po nájdení tejto možnosti ste už nevysvetlili, prečo to s menším počtom kamarátov nepôjde.

Poznámka:

Pre záujemcov dodám, že za touto úlohou sa skrýva aj čosi viac. Pri optimálnom využívaní benzínu (ktoré našli iba niekoľkí z Vás) zostane Dženy v cieli ešte 1/12 objemu nádrže s benzínom. Vzdialenosti, ktoré dokáže Dženy dosiahnuť pre rôzne počty kamarátov, sa nazývajú „harmonické čísla“. Kto chce, určite sa na internete dočíta viac.

Bodovanie:

systém prelievania – 2,5b.; vysvetlenie, prečo sa to s menším počtom áut nedá – 2,5b.; fungujúci systém prelievania s viac ako 3 kamarátmi – 0,5b.; pokusy o objasnenie demonštrované iba na konkrétnych príkladoch „pokus/omyl“ – 3b.; pamätajte: čím viac otázok typu „prečo?” súvisiacich s riešením zodpoviete, tým viac bodov môžete získať.

Úloha S4: Turnaj v piškvorkách. *Opravoval Pavol „Lietadlo“ Koprda.*

Na turnaji sa odohralo 23 zápasov. Dženy a Akáta odohrali každá rovnaký (neznámy) počet zápasov a okrem nich hral každý s každým práve raz. Otázka znie, či Dženy s Akátou odohrali vzájomnú partiu.

Najprv sa pokúsme zistiť, koľko hráčov vôbec mohlo byť na turnaji. Pre nejaký konkrétny počet hráčov vieme ľahko spočítať, koľko zápasov sa určite odohralo aj bez Dženy a Akáty, a potom koľko najviac zápasov sa mohlo (ale nemuselo) odohrať aj s Dženy a Akátou. Počet 23 odohratých zápasov sa musí nachádzať medzi týmito dvoma hranicami.

Ak by napríklad hráčov bolo 7. V tom prípade piati z nich (bez Dženy a Akáty) určite odohrajú medzi sebou 5·4/2 = 10 zápasov. Potom ešte môžu obe slečny hrať s každým z ostatných hráčov, čo je +5+5 zápasov, a nakoniec ešte môžu hrať dievčatá svoju vzájomnú partiu, čo je ešte +1 zápas. Takže pri počte 7 hráčov sa mohlo odohrať najmenej 10 a najviac 10+5+5+1=21 zápasov. To je primálo, pretože my vieme, že zápasov sa odohralo až 23. Zistili sme, že **hráčov muselo byť viac ako 7**.

Ako je to s počtom hráčov 8? Šesť hráčov (bez Dženy a Akáty) určite odohrá medzi sebou 6·5/2 = 15 zápasov. Potom slečny ešte môžu pridať maximálne +6+6+1 = +13 zápasov, takže najviac môže byť 28 zápasov. Takýto prípad by už mohol nastať (pretože 15 < 23 < 28) a znamenal by, že Dženy s Akátou odohrali dokopy 23–15 = 8 zápasov.

Toto však nie je jediná možnosť. Čo ak by hráčov bolo 9? Rovnakými výpočtami ako v predošlých odsekoch prídeme na to, že na takomto turnaji by sa muselo odohrať minimálne 21 a maximálne 36 zápasov. Tým pádom prichádza do úvahy aj to, že Dženy a Akáta odohrali 23–21 = 2 zápasy.

Pre počet hráčov 10 nám už vyjde minimálny počet zápasov 28, čo je priveľa, takže **hráčov nemohlo byť 10 alebo viac**. Okrem toho môžeme povedať, že **Dženy a Akáta odohrali dokopy buď 8, alebo 2 zápasy**.

Ostáva už iba zamyslieť sa nad tým, čo znamená odohranie vzájomného zápasu medzi Dženy a Akátou. Zo zadania vieme, že obe odohrali rovnaký počet zápasov. Ak by nehrali spolu, tak by celkový počet ich zápasov bol jednoducho „dvakrát počet zápasov každej z nich“, a teda párne číslo. Ak by však hrali spolu, tak by sa im jeden zápas počítal spoločne, a teda celkový počet ich zápasov by bol „dvakrát počet zápasov každej z nich mínus jedna“, čiže nepárne číslo. Keďže jediné dve možnosti, koľko zápasov mohli odohrať (2 alebo 8), sú párne čísla, môžeme prehlásiť, že **Dženy s Akátou svoju vzájomnú partiu neodohrali**.

Bodovanie:

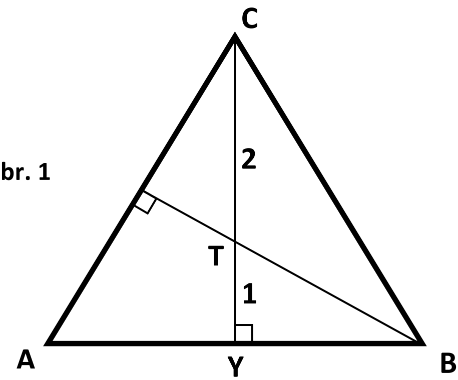
možný počet hráčov na turnaji (8 alebo 9) – 2b.; počet odohratých zápasov pre Dženy a Akátu (8 alebo 2) – 2b.; vyvodenie správneho záveru, že spolu nehrali – 1b.

Úloha S5: Cukrovinky. *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula.*

Úloha má viac postupov, ktorými sa vieme dostať k správnemu riešeniu. Ukážeme si jeden z nich.

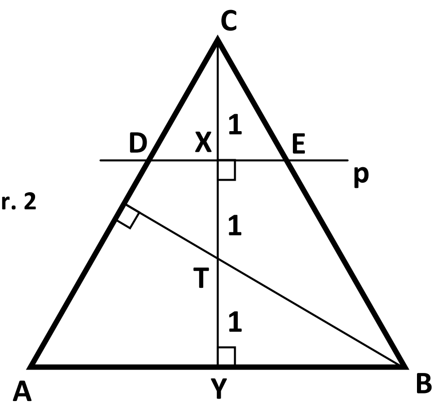
Najprv si musíme uvedomiť, že v rovnostrannom trojuholníku sú ťažnice totožné s výškami. To znamená, že ľubovoľná ťažnica trojuholníka je kolmá na stranu, ktorej stred spája s protiľahlým vrcholom. Vieme, že ťažisko leží na priesečníku ťažníc a delí úsečku *CY* na úsečky *CT* a *TY* v pomere 2:1 (Obr. 1).

Obr. 1



Teraz si položíme otázku: Kde je hranica, ktorá rozdeľuje všetky body roviny na také, ktoré sú bližšie k vrcholu *C* a také, ktoré sú bližšie k ťažisku *T*? Uprostred bodov *C* a *T* sa nachádza bod *X*, teda je zrejmé, že spomínaná hranica musí prechádzať cez tento bod. Keďže musia byť všetky body tejto hranice rovnako vzdialené od bodov *C* a *T*, tak touto hranicou môže byť jedine priamka cez *X* kolmá na úsečku *CT* – označme si ju *p* (Obr. 2). Úsečka *CT* je dvakrát dlhšia ako *TY* (lebo ťažisko rozdeľuje ťažnicu v pomere 2:1) a keďže ju priamka *p* rozdeľuje na polovicu, tak platí: $|CX| = |XT| = |TY|$.

Obr. 2



Veľký trojuholník *ABC* a malý trojuholník *DEC* sú podobné (podľa vety uu). Vidíme, že úsečka *CX* je kolmá na úsečku *DE*, a preto je úsečka *CX* výškou malého trojuholníka. Ďalej vidíme, že pomer výšok týchto trojuholníkov je $CX : CY = 1:3$. Keďže pomer výšok trojuholníka je 1:3, tak aj každá strana trojuholníka *DEC* je 3-krát menšia ako strana trojuholníka *ABC*. V geometrii to nazývame, že *koeficient podobnosti k*=3.

Vieme, že obsah veľkého trojuholníka sa rovná:

$$S_{ABC} = \frac{|AB| \cdot v}{2}$$

Vieme, že ako výška malého trojuholníka, tak aj jeho základňa je oproti veľkému trojuholníku tretinová. Preto nám pre obsah malého trojuholníka vyjde:

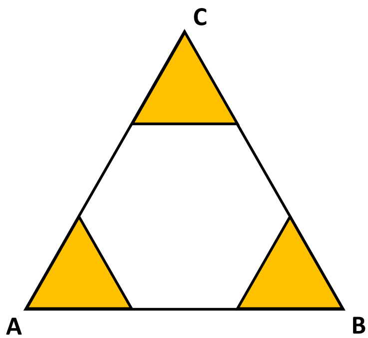
$$S_{DEC} = \frac{\frac{1}{3} \cdot |AB| \cdot \frac{1}{3} \cdot v}{2} = \frac{\frac{1}{9} \cdot |AB| \cdot v}{2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{|AB| \cdot v}{2}$$

Teraz si v tomto vzťahu môžeme nahradiť obsah veľkého trojuholníka:

$$S_{DEC} = \frac{1}{9} \cdot \frac{|AB| \cdot v}{2} = \frac{1}{9} \cdot S_{ABC}$$

Tým sme ukázali, že ak je pomer strán 1:3, tak pomer obsahov je 1:9.

Takýto trojuholník však dostaneme rovnakým spôsobom pri každom vrchole veľkého trojuholníka *ABC* (Obr. 3). Keďže každý z nich zaberá 1/9 plochy veľkého trojuholníka, spolu budú zaberať 3·1/9=1/3 plochy veľkého trojuholníka. Takže odpoveď na otázku zo zadania znie: **Poleva zaberala 1/3 plochy perníka.**



Obr. 3

Bodovanie:

správny výsledok – 1b.; presné určenie plochy polevy – 0,5b.; výpočet obsahu tejto plochy – 1b.; dokázanie, že to platí v každom rovnostrannom trojuholníku – 2,5b.