Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

33. ročník www.pikomat.sk školský rok 2015/2016

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Vek. *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula.*

Označme si cifry v hľadanom obľúbenom čísle ako A, B. Potom obľúbené číslo vieme zapísať aj ako 10·A+B. Toto číslo napísané odzadu teda možno zapísať ako 10·B+A. Súčet týchto dvoch čísel bude 11·A+11·B = 11·(A+B).

Zadanie nám hovorí, že toto číslo sa zároveň rovná druhej mocnine Drollinho veku. Teda jej vek je odmocnina z 11·(A+B). A aby jej vek bol prirodzené číslo, tak A+B musí byť násobok 11, pretože 11 je prvočíslo. Keďže A, B sú cifry, tak môžu mať veľkosť len od 0 po 9, a preto ich súčet môže byť maximálne 18. Z toho vyplýva, že A+B musí byť 11, a teda **Drollie mohla mať vtedy iba 11 rokov**.

Teraz už len treba zistiť, aké mohlo byť jej obľúbené číslo. Keďže sme zistili, že A+B = 11, tak si už jednoducho určíme Drolline možné obľúbené čísla, pretože musia mať ciferný súčet 11. Teda jej **obľúbené čísla môžu byť: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 a 92**.

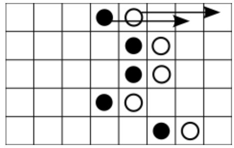
Bodovanie:
nájdenie správneho veku – 0,5b.; nájdenie všetkých možných obľúbených čísel – 1b.; vysvetlenie postupu – 2,5b.; ukázanie, že žiadne iné možnosti nevyhovujú – 1b.

Úloha S2: Flosa. *Opravoval Michal „Kesy“ Kesely.*

Máme pred sebou hru dvoch hráčov, pri ktorej máme určiť, kto vyhrá, ak obaja hrajú najlepšie, ako sa dá. V matematickej reči hovoríme, že hľadáme *stratégiu* pre jedného z hráčov. Hráčov budeme volať len „čierny“ a „biely“. Hľadáme teda akýsi postup alebo recept pre jedného z hráčov, vďaka ktorému bude tento hráč vedieť reagovať na ťahy súpera a nakoniec vyhrá. Dôležité je, aby hráč vedel zareagovať na *ľubovoľný* ťah súpera.

Jednou z vynikajúcich stratégií, ktorá sa dá použiť nielen v tejto úlohe, je takzvané *zrkadlenie*. Princíp je pomerne jednoduchý – snažím sa dostať hrací plán do stavu, kde budem vedieť opakovať ťahy súpera. To mi zaručí, že po akomkoľvek súperovom ťahu budem aj ja vedieť spraviť ešte ďalší vlastný ťah. Ako konkrétne to vieme využiť vo Flose?

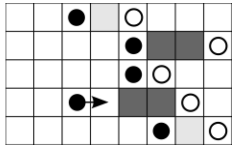
Najprv si uvedomíme, že akonáhle sa ocitnú všetky kamene bezprostredne pri sebe (Obr. 1), tak hráč, ktorý je vtedy na ťahu, prehrá. Jeho jedinou možnosťou totiž je začať ustupovať dozadu, na čo súper ale vždy zareaguje iba prisunutím svojho kameňa tým istým smerom (Obr. 1) a situácia sa opakuje. Toto pokračuje, až sa všetky kamene jednej farby ocitnú zablokované na kraji plochy, čo znamená prehru. Preto každý hráč chce, aby po jeho ťahu boli kamene vo všetkých riadkoch bezprostredne pri sebe.



Obr. 1

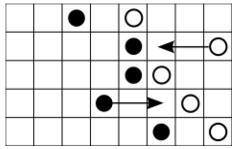
Na tomto mieste sa nám hodí pozrieť sa na veľkosti medzier v jednotlivých riadkoch. Na začiatku hry majú medzery veľkosti (odhora dolu) 1-2-0-3-1 políčok. Rozdeľme si riadky na 3 skupiny:

– 1. a 5. riadok, kde je veľkosť medzery 1 políčko;
– 3. riadok, kde sú kamene už pri sebe;
– 2. a 4. riadok, kde sú veľkosti medzier 2 a 3 políčka.



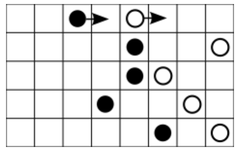
Obr. 2

Výhodou čierneho je možnosť prvého ťahu. Hneď týmto prvým ťahom totiž vie dosiahnuť, aby medzery v 2. a 4. riadku mali obe 2 políčka (Obr. 2).



Obr. 3

Potom už čierny môže v prípade, že sa biely vo svojom ťahu k nemu priblíži, aplikovať *zrkadlenie*. To znamená, že bude opakovať ťahy súpera, lenže v inom riadku tej istej skupiny. To znamená, že ak sa biely priblíži v 2. riadku o 2 políčka, čierny sa vo svojom ťahu priblíži o 2 políčka vo 4. riadku (Obr. 3). Týmto si čierny zabezpečí, že po ťahu bieleho má ešte sám ďalší ťah, čo je preňho nevyhnutné.



Obr. 4

Ak sa biely vo svojom ťahu od čierneho vzdiali, čierny sa jednoducho pohne tak, aby zachoval veľkosti medzier (Obr. 4).

Postupným opakovaním týchto dvoch pravidiel čierny nakoniec dosiahne, že kamene vo všetkých riadkoch budú po niektorom jeho ťahu bezprostredne pri sebe, biely začne ustupovať a nakoniec prehrá. Čierny vyhrá.

Takže ešte raz výherná stratégia čierneho v skratke:

– v prvom ťahu sa čierny pohne v 4. riadku o 1 políčko doprava;
– ak sa biely vo svojom ťahu vzdiali od čierneho, tak sa čierny pohne tak, aby zachoval veľkosť medzery;
– ak sa biely vo svojom ťahu k čiernemu priblíži, čierny zopakuje jeho ťah v druhom riadku tej istej skupiny.

Táto konkrétna úloha sa dala vyriešiť aj rozoberaním jednotlivých možností. Výhodou tejto stratégie však je, že sa dá použiť aj pri niektorých väčších plánoch a väčších rozostupoch medzi kameňmi.

Poznámka:

Niektorí ste pri riešení predpokladali, že kamene sa môžu hýbať len o 1 políčko. O tom sa však v zadaní nič nepíše, takže ste si úlohu priveľmi zjednodušili.

Bodovanie:

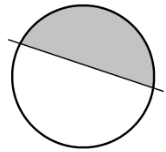
správna odpoveď – 1b.; postup – 4b.; za riešenie úlohy so zjednodušujúcim predpokladom – max 2b.

Úloha S3: Nášivka. *Opravoval Matěj Žídek.*

Predstavme si najprv iba prázdnu kruhovú nášivku bez priamok a poďme do nej priamky postupne po jednej pridávať. Po každej pridanej priamke sa zamyslíme, či sa daný útvar dá vyfarbiť len dvoma farbami v súlade so zadaním.

Prvá priamka rozdelí nášivku na 2 časti a každú vyfarbíme jednou farbou (Obr. 1).

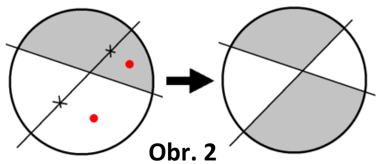
Pridajme druhú priamku. To nám už spôsobí problém: na Obr. 2 vľavo vidíme krížikmi označené dve hranice medzi plochami rovnakej farby. Tento problém môžeme vyriešiť napríklad tak, že plochy označené bodkami prefarbíme na opačnú farbu (Obr. 2).



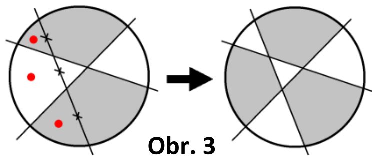
Obr. 1

Keď pridáme tretiu priamku, problém sa opakuje – viď tri krížiky na Obr. 3 vľavo. Aj tu však po krátkom zamyslení prídeme na to, že stačí zmeniť farbu plôch označených bodkami a všetko je zase OK (Obr. 3).

Pomaly začína byť zrejmé, že každá pridaná priamka spôsobí presne toľko „problémov“, cez koľko plôch bude prechádzať. Zároveň sa však zdá, že tieto problémy sa vždy dajú aj pomerne jednoducho vyriešiť. Treba si iba uvedomiť, že keďže nášivka bola pred pridaním poslednej priamky ofarbená v súlade s pravidlami a nová priamka ju iba rozdelila na dve časti, tak každá z týchto nových častí je **sama o sebe ešte stále ofarbená v súlade s pravidlami**. Problémy nastávajú iba na hranici medzi týmito časťami. Zároveň je jasné, že **keď <u>všetky</u> farby preklopíme na opačné, tak na „susedských vzťahoch“ to nič nezmení** – plochy, ktoré boli rovnaké, ostanú rovnakými, a rôzne ostanú rôznymi.



Obr. 2



Obr. 3

Preto ak v celej jednej časti – teda iba na jednej strane od novej priamky – preklopíme <u>všetky</u> farby na opačné, stanú sa dve veci: 1) Samotná tá časť bude naďalej vyfarbená v súlade s pravidlami, iba v opačných farbách. 2) Na hranici sa vyriešia všetky problémy, pretože všetky políčka na jednej strane hranice zmenia farbu na opačnú.

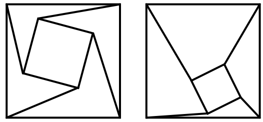
Takto by sme mohli pridávať priamky donekonečna, stačí len **po každom pridaní priamky všetkým políčkam na jednej strane od novej priamky zmeniť farbu**. Tým pádom sme ukázali, že aj pri ľubovoľnom počte priamok sa nášivka vždy dá ofarbiť v súlade so zadaním.

<u>Bodovanie</u>:

rozobratie konkrétnych prípadov alebo polohy 2 priamok – 0,3b.; zistenie, že to naozaj ide – 0,5b.; postup ofarbovania – 2b.; správne riešenie bez dôkazu správnosti – 4,5b.; správne riešenie – 5b.

Úloha S4: Obrazy. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

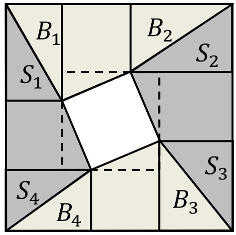
Ešte raz si prečítajme zadanie. Spotreba oboch druhov dreva má byť podľa Drollie rovnaká **bez ohľadu na umiestnenie plátna v rámčeku**. Teda nestačí nám ukázať si to na pár špeciálnych prípadoch, alebo nakresliť si pár takých obrazov v rámoch a spočítať obsahy – treba nájsť nejakú vlastnosť, ktorá tam je vždy pri ľubovoľnom umiestnení plátna v ráme – napríklad aj pri takých, aké sú na Obr. 1.



Obr. 1

Možností dôkazu je viac, väčšina z Vás na to išla takto:

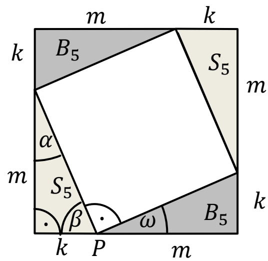
1) Medzi rohmi rámu a plátna si nakreslíme obdĺžničky. Vidíme, že každý z týchto obdĺžničkov je delený uhlopriečkou (spojnicou rohu rámu a rohu plátna – hranicou borovicového a smrekového dreva) na dva trojuholníky. Tieto majú rovnaký obsah – sú to polovice príslušných obdĺžnikov (Obr. 2).



Obr. 2

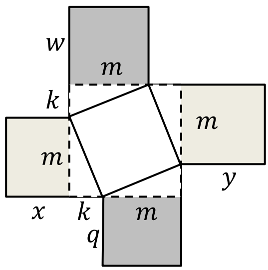
2) Ostali nám ešte po dva lichobežníky z každého dreva. Pozrime sa na ne. Môžeme si ešte z týchto lichobežníkov odrezať trojuholníčky okolo plátna, ktoré budú mať strany rovnobežné so stranami rámu (prerušované čiary v Obr. 2). Tieto trojuholníky sú zhodné, a teda majú rovnaký obsah.

3) Kto neverí, že sú naozaj zhodné, aha (Obr. 3): V smrekovom trojuholníku platí, že $\alpha + \beta + 90° = 180°$. V uhle pri vrchole P platí, že $\beta + 90° + \omega = 180°$. Z toho vyplýva, že $\alpha = \omega$. Takto si ukážeme, že všetky 4 trojuholníky majú rovnaké uhly, a keďže majú rovnakú preponu (stranu štvorcového plátna), sú zhodné. To nám ďalej pomôže aj v tom, že majú rovnaké strany (označme si ich m a k).



Obr. 3

4) Zvyšné dve borovicové a dve smrekové časti zjavne nie sú rovnaké – keď napríklad budeme posúvať plátno hore-dole, jedna borovicová časť sa bude zväčšovať a druhá zmenšovať. Ale ich súčet ostane rovnaký! A to využijeme. Keď si pozrieme obsahy jednotlivých častí (Obr. 4), tak borovicové budú mať obsah $w \cdot m + q \cdot m = (w + q) \cdot m$. Smrekové časti budú mať dokopy $(x + y) \cdot m$. A z Obr. 4 tiež vidíme, že $w + k + m + q = x + k + m + y =$ strana veľkého štvorca (rámu). Takže $(w + q) = (x + y)$. Dokopy majú tie dve dvojice rovnaký obsah.



Obr. 4

5) Tak, máme rámiky rozdelené na veľa častí a ukázali sme si, že borovicové časti majú naozaj dokopy rovnaký obsah ako smrekové časti. **Drollie mala teda pravdu.** Toto, čo sme robili, funguje pri úplne ľubovoľnom umiestnení plátna v ráme, spomeniem ale niektoré špeciálne prípady. Ak by bolo plátno umiestnené rovnobežne s rámom, jediný rozdiel by bol, že by sme neosekávali trojuholníčky z lichobežníkov, ale mali by sme

$S_5 = B_5 = 0$, čo je v poriadku. Ak by sa plátno dotýkalo niektorého kraja rámu (dajme tomu spodného), taktiež nevadí, akurát by sme nemali príslušný rohový obdĺžnik (napr. $S_4 = B_4 = 0$) ani obdĺžnik v poslednom kroku riešenia ($q = 0$, ale zase w by bolo o to väčšie, takže by to sedelo: $w + k + m = x + k + m + y \rightarrow w = x + y$).

Bodovanie:
Odseky 3 a 5 v tomto vzorovom riešení sú iba na objasnenie situácie. Na plný počet bodov mi stačili odseky 1, 2, 4, a aj v tom by mi stačilo slovne, že šírka tých dvoch smrekových častí dokopy je vlastne celá šírka rámu mínus šírka časti, kde je plátno... Hlavné bolo ukázať, ktoré časti majú rovnaké obsahy **a prečo**. Samotná odpoveď, že Drollie mala pravdu, je za bod.

Poznámka:
Viacerí z Vás napísali niečo ako „keď posunieme plátno napr. doľava, tak sa jedna smreková časť zväčší, ale druhá sa o toľko isto zväčší, lebo platí nepriama úmernosť“. **Toto je bohužiaľ úplne zlé tvrdenie**. To, že jedno stúpa a druhé klesá, z toho ešte nerobí nepriamu úmernosť. Nepriama úmernosť je napríklad to, že keď jeden robotník vykope jamu za 1 deň, tak dvaja robotníci ju vykopú za pol dňa, traja za 1/3 dňa, atď. $1 \times 1 = 2 \times 0{,}5 = 3 \times \frac{1}{3}$. Pri **nepriamej úmernosti** sa nám zachováva **súčin** dvoch veličín, **nie súčet.** A pri priamej úmernosti sa nám zachováva pomer. Napr. ak za 1 deň zjem 5 rožkov, tak za 4 dni zjem 20 rožkov... $1:5 = 4:20$.

Úloha S5: Čísla kódu. *Opravovala Ľudmila „Ľudka“ Šimková.*

Najmenší spoločný násobok čísel *x* a *y* budeme označovať n[*x*, *y*]. Najväčší spoločný deliteľ čísel *x* a *y* budeme označovať D(*x*, *y*). Ak chceme zistiť niečo o číslach *x* a *y* pomocou ich najmenšieho spoločného násobku n[*x*, *y*] a najväčšieho spoločného deliteľa D(*x*, *y*), treba sa pozrieť na ich prvočíselný rozklad.

Prvočísla z D(*x*, *y*) sa musia všetky nachádzať aj v čísle *x*, aj v čísle *y* – pretože D(*x*, *y*) delí *x* aj *y*. Naproti tomu n[*x*, *y*] musí obsahovať všetky prvočísla, ktoré sú v čísle *x*, ako aj všetky prvočísla, ktoré sú v čísle *y* – pretože n[*x*, *y*] je násobkom čísla *x* aj čísla *y*.

n[*x*, *y*] zistíme tak, že postupne zapisujeme prvočísla z *x*. Ak zapíšeme číslo, ktoré sa nachádza aj v *y*, tak ho z rozkladu čísla *y* škrtneme; nakoniec dopíšeme nevyškrtané čísla z *y*.

Napíšme si podmienky zo zadania pomocou súčinu prvočísel:

D(*a*, *b*)	= 15	= 3·5
n[*a*, *b*]	= 3150	= 2·3·3·5·5·7
D(*b*, *c*)	= 6	= 2·3
b · *c*	= 1800	= 2·2·2·3·3·5·5

Postupne si k číslam *a*, *b* a *c* zapisujme prvočísla, ktoré sa v nich musia nachádzať.

Číslo b je deliteľné 15 aj 6, preto sa v ňom nachádza 2, 3 aj 5. Tieto tri čísla si označíme (napríklad zakrúžkujeme) v súčine $b \cdot c$ na znak toho, že už vieme, že patria číslu b – prvočísla z $b \cdot c$ sa totiž snažíme „porozhadzovať“ medzi čísla b a c.

Číslo c je deliteľné 6, teda v jeho rozklade sa nachádza 2 a 3. V súčine $b \cdot c$ si nejako inak (napríklad podčiarknutím) vyznačíme jednu dvojku a jednu trojku na znak toho, že už vieme, že partia c. Ostalo nám určiť, kam patrí zvyšná dvojka a päťka. Ak by sme 2 priradili do b, tak by 3150 nebol násobok čísla b (b by bolo deliteľné 4, avšak 3150 je deliteľné iba 2). Teda 2 je v c. Ak by sme 5 priradili do c, tak by čísla b a c mali spoločnú aj 5-ku, a teda by sa musela nachádzať aj v D(b, c). Tam ale nie je, a teda sa 5 nachádza v b. Keďže sme „porozhadzovali“ všetky prvočísla zo súčinu $b \cdot c$, v číslach b a c sa nemôže nachádzať nič ďalšie. Dostali sme $\boldsymbol{b = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150}$ a $\boldsymbol{c = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12}$.

Pozrime sa na číslo a. Vieme, že sa v ňom môžu nachádzať iba prvočísla z n[a, b] a tiež vieme, že s číslom b má spoločné iba prvočísla 3 a 5. To už nám hneď hovorí, že a obsahuje 3 a 5. Keďže v b sa nachádzajú dve 5, tak ak by sme do a priradili ďalšiu, tak by sa museli nachádzať dve 5 aj v D(a, b). Z rovnakého dôvodu nemôžeme do a pridať ani 2. Keďže 7 sa v b nenachádza, ale v n[a, b] áno, musíme ju pridať do a. Ostáva nám už iba 3. Zatiaľ sa v a i v b nachádza po jednej 3, ktoré sa do n[a, b] zapíšu ako jedna. Aby nám teda vychádzal n[a, b], musíme druhú trojku pridať do a. A keďže sme vyčerpali všetky prvočísla z n[a, b], tak môžeme prehlásiť, že v a sa už nič ďalšie nachádzať nemôže. Dostávame $\boldsymbol{a = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 315}$. A teda riešním úlohy je **a = 315, b = 150, c = 12**.

Bodovanie:
iba výsledok – 1b.; jednoznačné určenie b a c – 3b.; určenie a – 1b.; neukázanie, že v a sa nemôže nachádzať 2 a ďalšia 5 – mínus 1b.; nevyskúšanie všetkých možností (pri riešeniach s vypisovaním možností) – mínus 1b.