Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

33. ročník www.pikomat.sk školský rok 2015/2016

Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Kúzelný kameň. *Opravovala Simona „Simča“ Galková.*

Zadanie hovorí, že dierky musia byť od seba vzdialené *viac ako* 10 cm. Pre začiatok si to trochu zjednodušíme a budeme skúmať situáciu, ak by mohli byť vzdialené aj *presne* 10 cm. Rozmýšľajme, ako umiestniť 3 dierky, aby dodržovali túto vzdialenosť, ale zároveň boli čo najtesnejšie pri sebe. Nepotrvá dlho a prídeme na to, že ich treba umiestniť do vrcholov rovnostranného trojuholníka so stranou dlhou 10 cm. Zároveň vieme, že na tejto ploche určite nemôžu byť ďalšie dierky.

Rovnostranný trojuholník so stranou 30 cm vieme rozdeliť na 9 malých rovnostranných trojuholníčkov so stranami 10 cm. Týchto 9 trojuholníčkov má presne 10 vrcholov, ktoré by mohli predstavovať dierky spĺňajúce vzájomnú minimálnu vzdialenosť 10 cm.

Takto sme zmestili 10 dierok do rovnostranného trojuholníka so stranou 30 cm najefektívnejším možným spôsobom – teda sme pokryli celú plochu trojuholníka, na ktorú mohli byť dierky rozmiestnené.

Narážame však na dva problémy. Za prvé sme dierky umiestňovali od seba *presne* 10 cm, aj keď podľa zadania to malo byť *viac ako* 10 cm. Lenže akékoľvek zväčšenie vzájomnej vzdialenosti nad 10 cm by zväčšilo aj celý náš útvar 10-tich dierok, a teda by sa určite nezmestil na plochu rovnostranného trojuholníka so stranou 30 cm.

Za druhé sú niektoré dierky umiestnené aj priamo na stranách veľkého trojuholníka, čo zadanie tiež jasne zakazuje. Mohli by sme sa pokúsiť dierky posunúť smerom dovnútra. Lenže... Ak sa dve dierky nachádzajú v jednom malom trojuholníčku, tak vzdialenosť medzi nimi je určite menšia ako 10 cm. My máme 10 dierok a iba 9 malých trojuholníkov, takže minimálne dve dierky určite skončia v jednom malom trojuholníku, a teda budú od seba vzdialené *menej ako* 10 cm.

Tým sme dokázali, že umiestniť 10 dierok do rovnostranného trojuholníka so stranou 30 cm tak, aby medzi dierkami bolo viac ako 10 cm a zároveň neležali na stranách veľkého trojuholníka, je nemožné.

Bodovanie:

možné rozmiestnenie bodiek s *presne* 10 cm vzdialenosťami – 1b.; dôkaz buď konštrukciou alebo slovný, správne okomentovaný – 4b.; za rôzne matematické nepresnosti som strhávala body podľa ich závažnosti.

<u>**Úloha S2: Hádanka.** *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula*</u>.

Keď si všimneme posledné skúšané číslo, tak sa v ňom nachádza len jedna číslica na správnom mieste. Ak by to bola číslica 5, tak by musela byť na správnom mieste aj v treťom čísle, pretože sa tiež nachádza na prvej pozícii. V treťom čísle však žiadnu číslicu na správnom mieste nemáme, z čoho vyplýva, že číslica 5 sa vo výslednom čísle nachádzať nemôže. Rovnako môžeme vylúčiť aj číslicu 8, pretože druhé číslo tiež nemá žiadnu číslicu na správnom mieste. Z toho vyplýva, že v hľadanom čísle musí byť buď číslica 7, alebo číslica 9.

Teraz sa zamerajme na prvé dve čísla. Vidíme, že číslice 1 a 2 sa v oboch z nich nachádzajú na tých istých pozíciách. Keby v prvom čísle bolo jedno z nich na správnej pozícii, tak by muselo byť na správnej pozícii aj v druhom čísle. Druhé číslo však nemá žiadnu číslicu na správnom mieste, čo znamená, že ani jedna z číslic 1 a 2 sa nenachádza na správnej pozícii. V prvom čísle ešte môže byť na správnom mieste číslica 5 alebo 6. Vieme však, že číslica 5 sa v hľadanom čísle vôbec nenachádza, a preto v hľadanom čísle bude na prvej pozícii číslica 6. V prvom čísle je ešte jedna číslica na nesprávnej pozícii, teda buď číslica 1, alebo číslica 2.

V čísle 4182 sú dve číslice na nesprávnej pozícii. Už sme vylúčili číslicu 8 a tiež sme zistili, že z číslic 1 a 2 sa v hľadanom čísle nachádza len jedna. Z toho vyplýva, že číslica 4 sa nachádza v hľadanom čísle.

Zistili sme, že v hľadanom čísle musia byť číslice 4 a 6, práve jedna z číslic 1 a 2 a ešte práve jedna z číslic 7 a 9. Hľadané číslo má len 4 cifry, z čoho vyplýva, že žiadna iná číslica tam už byť nemôže.

Pozrime sa teraz na číslo 5314. Vieme, že číslice 5 a 3 sa v hľadanom čísle nenachádzajú, a keďže dve číslice z tohto čísla sú správne, tak to musia byť 1 a 4. Číslicu 4 sme už poznali, teraz sme navyše vylúčili číslicu 2. V druhom ani treťom čísle sa na základe odpovedí jednotka nenachádza na správnej pozícii, a keďže na prvej pozícii už máme číslicu 6, znamená to, že číslica 1 musí byť posledná.

Posledná neznáma číslica je buď 7, alebo 9. My vieme, že v poslednom čísle sa nachádza na správnej pozícii. Na poslednej pozícii však už máme číslicu 1, a preto sa číslica 9 v hľadanom čísle nachádzať nemôže. Číslica 7 je v poslednom čísle rovno aj na správnom mieste, a preto aj v hľadanom čísle bude na druhom mieste. Číslici 4 ostala už len tretia pozícia. Zo zadania vieme, že štvorka sa nenachádza na prvej ani na poslednej pozícii, a preto nájdené číslo 6741 vyhovuje zadaniu. Týmto dostávame hľadané číslo a vieme s určitosťou povedať, že na kameni mohlo byť zakódované len číslo 6741.

<u>**Bodovanie**</u>**:**

výsledok – 1b.; overenie výsledku – 0,5b.; postup – 2b.; overenie jednoznačnosti – 1,5b.;

<u>**Poznámka**</u>**:**

Aj v prípade, že je riešenie správne, je potrebné ukázať, že je jednoznačné. Kvôli tomu žiadne ďalšie riešenia nemôžu existovať.

Úloha S3: Mapa. *Opravovala Kristína „Krisa“ Faguľová.*

Úloha vraví, že máme zistiť pomer obsahu útvaru *MRPQ* k celému obsahu štvorca *ABCD*. Nakoľko nepoznáme dĺžky, budeme si všímať vzťahy medzi nimi. Začnime trojuholníkom *ABD*. Úsečky *DM* aj *AP* sú ťažnicami v tomto tojuholníku, pretože bod *M* je stred *AB* a bod *P* je stred *BD*. Preto bod *Q* je ťažisko trojuholníka *ABD*. O ťažisku vieme, že delí ťažnicu v pomere 1:2, teda $|AP| = 3 \times |PQ|$.

Vyjadríme si obsah trojuholníka *APM*. Písmenom *v* označíme výšku v trojuholníku *AMP* z bodu *M*. $S_1 = |AP| \times v / 2 = 3 \times |PQ| \times v / 2$

Teraz si vyjadríme obsah trojuholníka *PQM:* $S_2 = |PQ| \times v / 2$

Vyjadríme si pomer týchto obsahov: $S_1 / S_2 = (3 \times |PQ| \times v / 2) / (|PQ| \times v / 2) = 3$.

Teda obsah trojuholníka *PQM* je tretina obsahu *APM*. To isté platí aj pre trojuholník *PRM* a *PBM*, keďže celý obrázok je symetrický. Tým pádom obsah útvaru *QPRM* musí byť tretinou obsahu trojuholníka *ABP*.

Posledne, trojuholník *ABP* je štvrtinou obsahu celého štvorca *ABCD*, preto je obsah útvaru *MRPQ* 3×4=12-krát menší ako obsah *ABCD*. Ich pomer je 1:12.

Poznámka:
Úloha sa dala riešiť mnohými spôsobmi, avšak tie správne boli pomocou pomerov obsahov a hľadaním podobností. Zistiť pomer rysovaním a meraním dĺžok je náročné a veľmi nepresné. Navyše ste mnohí počas výpočtov zaokrúhľovali. Takisto ste si niektorí zvolili dĺžku strany a prerátavali dĺžky cez Pytagorovu vetu. Je potrebné si uvedomiť, prečo počítanie s konkrétnou dĺžkou neovplyvní vyrátaný pomer. A ešte jazykové okienko na záver: *Pomer* udáva, koľkokrát je daná veličina väščia alebo menšia (a nie o koľko, kde ste niektorí uvádzali pomer 1:11).

Bodovanie:
Za počítanie s konkrétnou dĺžkou strán bez uvedenia, že tento postup neovplyvní všeobecné riešenie som strhla 0,2 boda. Za správny výsledok bol 1 bod. Za zvyšný postup ste mohli získať až 4 body. Riešenia, ktoré boli postavené na metóde narysujem a odmeriam mali maxiálne 2 body.

Úloha S4: Oslava. *Opravovala Michaela „Miška“ Zatrochová.*

Poďme postupne zisťovať, čo vieme z jednotlivých informácii zo zadania. Vieme, že každý z pánov č. 1 až 25 si podal ruku práve toľkokrát, aké je jeho číslo. Našou úlohou je v podstate zistiť, koľkí z týchto pánov si podali ruku aj s pánom č. 26.

Začnime pánom č. 25, keďže on si musel podať ruku s 25 ľuďmi, a teda s každým na oslave, pretože na oslave bolo okrem neho 25 ľudí. Pán č. 25 si podal ruku s každým, a teda aj s pánom č. 1. Pán č. 1 si podal ruku s práve jedným človekom, takže aj jeho podávanie rúk tu už skončilo.

Poďme na pána č. 24. Ten si na oslave podal ruku s každým okrem jedného. V predošlom kroku sme zistili, že pre pána č. 1 podávanie rúk už skončilo, keď si podal ruku s pánom č. 25, a tak si nemohol podať ruku s pánom č. 24. Môžeme teda s určitosťou povedať, že pán č. 24 si podal ruku s pánmi č. 2 až 23, a tiež s pánmi č. 25 a 26. Tým pádom pán č. 2 tiež s podávaním rúk už skončil, lebo si už podal ruku s pánmi č. 24 a 25.

Úplne rovnakým postupom pokračujme pri pánovi č. 23. Keďže si nemohol podať ruku s pánmi č. 1 a 2, tak mu ostalo práve 23 pánov, s ktorými si ruku podať musel. Konkrétne s pánmi č. 3–22, 24, 25 a 26. Opäť, pán č. 3 si s nikým ďalším ruku nepodá, keďže už si podal ruku s troma pánmi, č. 23, 24, 25.

Všimnime si, že keď takto postupujeme, vždy vytvárame dvojicu, z ktorej si jeden podal ruku s pánom č. 26 a jeden nepodal ruku s pánom č. 26. Dvojice takýmto spôsobom vzniknú nasledovné:

25-1, 24-2, 23-3, 22-4, 21-5, 20-6, 19-7, 18-8, 17-9, 16-10, 15-11 a 14-12.

Ostal nám pán č. 13, o ktorom pri takomto postupe ľahko zistíme, že si podal ruky s pánmi č. 25 až 14, čo je dvanásť podaní rúk. Jedno podanie ruky mu ešte chýba, takže si podal ruku aj s pánom č. 26.

Ostáva už len dopočítať, s koľkými si podal ruku pán č. 26. Keďže sme zistili, že z každej dvojice si podal ruku práve jeden a dvojíc máme 12, tak 12 ľudí si podalo ruku s pánom č. 26. Netreba zabudnúť na pána č. 13, ktorý si tiež s pánom č. 26 podal ruku, ako sme zistili v predošlom odstavci. **Celkovo si pán č. 26 podal ruku s 13 ľuďmi na oslave.**

Bodovanie:
správny výsledok – 2b.; vysvetlenie postupu – 3b.; za chybičky v úvahe – mínus 1b.

Úloha S5: Alergia. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Úlohu si rozdelíme na dve časti. Na to, aby bol súčet deliteľný šiestimi, musí byť deliteľný dvomi a zároveň tromi. Potrebujeme teda dokázať obe tieto veci. A keďže sú obe približne rovnako náročné, tak každá z nich bude za 2,5 boda. Na oba dôkazy použijeme spoločný základ.

Pozrime sa, aké všetky čísla sú v Servácovom súčte. Čísla 3000-3456 nenapísal vôbec, lebo všetky obsahujú cifru 3 na mieste tisícok. Čísla menšie ako 1000 si v mysli doplníme nulami na začiatok, nech majú tiež 4 cifry (napr. zo 48 spravíme 0048). A môžeme si ešte domyslieť číslo 0000, ktoré by Servác mohol napísať. To súčet nezmení, ale nám sa bude ľahšie rozdeľovať čísla na rôzne skupinky.

Deliteľnosť tromi: Rozdeľme si Servácove čísla na trojice $0xyz, 1xyz, 2xyz$. Pre ľubovoľné trojčíslie xyz platí, že buď Servác napísal všetky tri čísla $0xyz, 1xyz, 2xyz$, alebo ani jedno z nich – podľa toho, či niektorá z cifier x, y, z bola 3 alebo 6). Súčet takejto trojice je $3000 + 3 \times xyz$. To je deliteľné tromi. Keďže takto vieme rozdeliť všetky Servácove čísla, tak aj celý súčet všetkých Servácových čísel je deliteľný tromi.

Deliteľnosť dvomi: Teraz si čísla rozdelíme na skupiny typu $xyz0, xyz1, xyz2, \cancel{xyz3}, xyz4, xyz5, \cancel{xyz6}, xyz7, xyz8, xyz9$, z ktorých Servác buď napísal všetkých 8, alebo ani jedno. Súčet tejto skupiny má na mieste jednotiek cifru 6 (resp. môžme si ho napísať ako $8 \times xyz0 + 36$, ale zaujíma nás len cifra na mieste jednotiek, ktorú ovplyvňujú len cifry jednotiek jednotlivých sčítancov), takže takýto súčet je párny. A keďže všetky Servácove čísla máme rozdelené na takéto skupiny, tak súčet týchto párnych skupín bude tiež párny a deliteľný dvomi.

Ta-dá, ani to nebolelo. Kiež by sa všetky alergie dali vyliečiť takto jednoducho! Ak chcete niečo na dlhé zimné večery, kým nám ešte nepoletuje peľ, môžte zistiť, či by bol súčet čísel, ktoré Servác napísal, deliteľný aj deviatimi.

Bodovanie:

Deliteľnosť dvomi – 2,5b.; deliteľnosť tromi – 2,5b.

Poznámka:

Veľa z vás sa snažilo priamo zistiť ten súčet, a potom ho len vydeliť šiestimi, tak sa pozrime, ako ho zistiť čo najjednoduchšie. Na mieste jednotiek, desiatok aj stoviek môžu byť len cifry 0,1,2,4,5,7,8,9. To je 8 cifier. Na mieste tisícok môže byť 0,1,2. Takže dokopy napísal Servác $3 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 1536$ čísel. A teraz finta fň! Cifra na mieste jednotiek je v priemere (0+1+2+4+5+7+8+9)/8=4,5, cifra na mieste desiatok 4,5, cifra na mistes stoviek 4,5 a cifra na mieste tisícok 1. Takže priemerné číslo je $1 \cdot 1000 + 4{,}5 \cdot (100 + 10 + 1) = 1499{,}5$. Súčet všetkých čísel je teda 1536 · 1499,5 = 2303232, čo je deliteľné šiestimi. Ak tomu, že priemerné číslo je 1499,5 neveríte, predstavte si, že párujeme tie čísla. 0 s 2999, 1 s 2998, 2 s 2997, ... Priemer takejto dvojice je vždy 1499,5 a všetky čísla s ciframi 3 alebo 6 sa nám popárujú spolu, takže zahodíme celé tieto dvojice bez toho, aby nám pokazili priemer. Napríklad 3 s 2996, 16 s 2983, 300 až 399 s 2699 až 2600.