Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

33. ročník www.pikomat.sk školský rok 2015/2016

Vzorové riešenia 2. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Rozhovor. *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula.*

Tvrdenia detí vyzerajú všetky rovnako, pretože každé z nich hovorí, že niekto iný je v jeho či jej rodine. Poďme sa pozrieť, ako to teda môže vyzerať, keď človek X tvrdí, že človek Y patrí do jeho rodiny:

Ak človek X hovorí pravdu – v tomto prípade je teda tvrdenie človeka X pravdivé a človek Y skutočne patrí do jeho rodiny, a tým pádom **aj človek Y hovorí pravdu.**

Ak človek X klame – teraz je tvrdenie človeka X nepravdivé, kvôli čomu človek Y patrí do druhej rodiny, takže **aj v tomto prípade človek Y hovorí pravdu**.

Vieme teda, že všetky deti, o ktorých niekto povedal, že sú v jeho rodine, určite hovoria pravdu. Týmto pádom sú podľa zadania pravdovravní minimálne F, C, D, A a E.

My potrebujeme zistiť, do ktorej z rodín patrí ten siedmy človek, ktorý prišiel. Tvrdil, že tri z detí sú v jeho rodine, a zvyšné tri v tej druhej. My však už vieme, že v rodine pravdovravných je určite aspoň 5 detí, takže siedmy človek nehovoril pravdu a musí byť **z rodiny klamárov**.

Bodovanie:
určenie rodiny siedmeho človeka – 1b.; odôvodnenie – 2,5b.; vylúčenie každého iného rozdelenia detí do rodín – 1,5b.

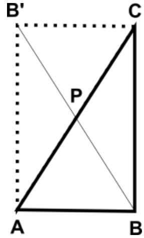
Úloha S2: Nešikovný kožušník. *Opravoval Michal „Kesy“ Kesely.*

Iba máloktorá úloha sa môže pochváliť takým množstvom rôznych a pekných riešení. V tomto vzorovom riešení si ukážeme jedno z nich.

Už samotné zadanie obsahuje drobnú nápovedu. Hovorí totiž o rôznostranných trojuholníkoch. Prečo sa nezmieňuje o rovnostranných, prípadne rovnoramenných trojuholníkoch? Jednoducho preto, že riešenie je v tomto prípade ľahké – trojuholník by sme obrátili podľa jednej z osí súmernosti a máme vyriešené.

To nám však môže vnuknúť nápad – čo tak sa pokúsiť rozdeliť ľubovoľný trojuholník na rovnoramenné (prípadne rovnostranné) trojuholníky? Veď tie potom môžeme postupne obrátiť podľa osí súmernosti a zošiť.

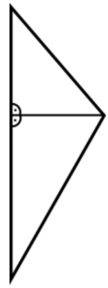
Pozrime sa teraz len na pravouhlé trojuholníky. Dajú sa takéto trojuholníky rozdeliť na rovnoramenné? Samozrejme. Keď si pravouhlý trojuholník ABC dokreslíme na obdĺžnik ABCB' a pridáme druhú uhlopriečku BB', dostaneme priesečník uhlopriečok P (Obr. 1). Už si len spomenieme, že uhlopriečky v obdĺžniku majú rovnakú dĺžku a navzájom sa rozpoľujú. Preto platí, že dĺžky úsečiek AP, BP a CP sú rovnaké. To ale znamená, že trojuholníky ABP a BCP sú rovnoramenné. Úlohu teda vieme vyriešiť pre pravouhlé trojuholníky.



Obr. 1

No a každý trojuholník predsa vieme rozdeliť na pravouhlé – stačí použiť výšku (Obr. 2). Použijeme výšku na najdlhšiu stranu, lebo tá sa nachádza v trojuholníku vždy. Aj v prípade tupouhlých trojuholníkov.

Takže jedným zo správnych postupov je: rozdeliť záplatu na dva pravouhlé trojuholníky pomocou výšky na najdlhšiu stranu. Potom každý z pravouhlých trojuholníkov rozdeliť na dva rovnoramenné. Všetky štyri rovnoramenné trojuholníky pretočiť a späť zošiť.


Obr. 2

Bodovanie:
Najčastejšie som strhával body za chýbajúcu úvahu o tupouhlých trojuholníkoch, prípadne za iné drobnosti.

Úloha S3: Elvírina kachlička. *Opravoval Pavol „Tamarka“ Hronský.*

Keďže do spodného riadku sme mohli doplniť **štyri** ľubovoľné prirodzené čísla, nazvime si ich A, B, C a D. Následne sme sčítali dve kachličky vedľa seba a ich súčet napísali do kachličky nad nimi. Takto sa dostaneme až do najvrchnejšej kachličky, v ktorej bude výraz

$$14 + 5 \cdot A + 10 \cdot B + 10 \cdot C + 5 \cdot D.$$

Tento výraz môžeme ešte upraviť pre lepšiu čitateľnosť na

$$5 \cdot (2 + A + 2 \cdot B + 2 \cdot C + D) + 4.$$

Po vydelení výrazu číslom 5 dostaneme výsledok (2+A+2B+2C+D) **zv. 4**. Avšak zabudli sme na jednu podstatnú vec! V zadaní bolo predsa napísané, že máme robiť zvyšky v každom kruhu a nie len v tom najvyššom. Tak prečo sme to neurobili? Nie je to treba? Odpoveď na túto otázku je síce jednoduchá – nie, netreba – avšak treba aj dokázať, že prečo.

Aby som mohol ľahšie ukázať, prečo stačí nájsť zvyšok až nakoniec, predstavím vám nový matematický operátor: *mod* (tzv. *modulus*). Niektorí ho už poznáte a tí, ktorí nie, je to niečo podobné ako plus, mínus, krát alebo deleno. Výsledok tejto operácie je zvyšok po delení. Teda napríklad: 7 mod 5 = 2; alebo 1 mod 3 = 1.

Našou úlohou je ukázať, že ak máme v dvoch kachličkách vedľa seba čísla X a Y, tak platí:

$$((X \bmod 5) + (Y \bmod 5)) \bmod 5 = (X + Y) \bmod 5.$$

Jednoducho povedané, že počítať zvyšok na každej kachličke je to isté ako ho počítať iba raz na tej poslednej. Nuž ale čo sú čísla X a Y? Mnohí z Vás ukázali, že tieto čísla vieme všeobecne rozpísať nasledovným spôsobom:

$$X = 5\cdot m + n;\ Y = 5\cdot p + q;$$

kde **m** a **p** sú nezáporné celé čísla a **n** a **q** sú celé čísla od 0 do 4. Pre čísla X a Y platí, že

$$X \bmod 5 = n;\ Y \bmod 5 = q.$$

Nuž a v tomto momente je už vlastne všetko jasné. Ľavá strana rovnice, ktorej správnosť sa snažíme ukázať, sa rovná:

$$((X \bmod 5) + (Y \bmod 5)) \bmod 5 = (n + q) \bmod 5$$

a pravá strana

$$(X + Y) \bmod 5 = (\ 5\cdot m + n + 5\cdot p + q) \bmod 5 = (\ 5\cdot(m+p) + (n+q)) \bmod 5 = (n + q) \bmod 5.$$

Obidve strany rovnice sa rovnajú, z čoho vyplýva to, čo sme všetci tušili už na začiatku, teda že na správne vyriešenie úlohy nebolo treba robiť zvyšky pri každom prechode medzi políčkami, ale až na tom najvrchnejšom.

Odpoveď: Na najvrchnejšom políčku sa vždy bude nachádzať číslo 4.

Bodovanie:
Za správnu odpoveď so slovným popisom, ako ste sa k nej dostali, sa dalo získať 2,5b. Kto si aspoň uvedomil, že na najvrchnejšej kachličke môže byť iba jedno z čísel od 0 do 4, získal 1b. Zvyšného 1,5b. sa dalo získať za vysvetlenie (aj s matematickým odôvodnením), prečo stačilo urobiť zvyšok po delení 5 až na poslednom políčku.

Úloha S4: Dakyho čísla. *Opravovala Kristína „Kika“ Prešinská.*

Každé číslo je deliteľné samým sebou a číslom jedna.

Keď chceme mať súčet deliteľov o štyri väčší, tak vieme, že toto číslo má za deliteľa samo seba, 1 a ostatné delitele majú súčet 3. Vieme trojku rozdeliť na viac deliteľov? Trojku vieme zapísať ako 1+2 alebo 3. Prvá možnosť neprichádza do úvahy, pretože jednotku už máme medzi deliteľmi započítanú. Teda hľadáme číslo, ktoré má delitele 1, 3 a samé seba. To znamená, že v prvočíselnom rozklade hľadaného čísla sa smú nachádzať iba samé trojky, pretože akékoľvek iné prvočíslo by predstavovalo ďalší deliteľ. Zároveň však v prvočíselnom rozklade nemôžeme mať viac ako dve trojky, pretože potom by medzi delitele pribudla ešte aj 9 a 27. Jediným východiskom je práve číslo $3\cdot3 = 9$. Môžeme si to ešte overiť. 9 má delitele 1, 3 a 9. Ich súčet je 1+3+9=13, a tak hľadaný rozdiel bude 13–9=4, čo sme presne chceli.

Teraz poďme hľadať číslo, ktoré má súčet deliteľov o 15 väčší. Na iné delitele ako ono samo a jednotku nám zostáva súčet 14. Rozdeľme si to na prípady podľa toho, koľko je zvyšných deliteľov. **a) 1 ďalší deliteľ:** Keď má mať súčet 14, tak to môže byť len 14. Avšak keď je deliteľom 14, musí byť deliteľom aj 2 a aj 7, čo už je priveľa.

b) 2 ďalšie delitele: Možné dvojice máme: 2 a 12, 3 a 11, 4 a 10, 5 a 9, 6 a 8. Postupne by sme vylúčili všetky možnosti okrem jednej. Dvojica 3 a 11, zdá sa, vyhovuje. Hľadané číslo teda musí byť ich súčin 3·11 = 33. Ľahko overíme, že 1+3+11+33 = 48 a že 48–33 = 15, teda našli sme ďalšie číslo – **33**.

c) 3 ďalšie delitele: Možné trojice máme: 2+3+9, 2+4+8, 2+5+7, 3+4+7, 3+5+6. Keď sa na každú pozrieme detailne, tak zistíme, že jediná vyhovujúca je 2+4+8. Takže hľadáme číslo s deliteľmi 1, 2, 4, 8 a samým sebou. Ľahko prídeme na to, že ďalším riešením je – **16**.

d) 4 ďalšie delitele: Možná štvorica je jedine 2+3+4+5, avšak táto možnosť nevyhovuje, pretože keď je číslo deliteľné 2 a 3, tak potom je deliteľné aj 6. Toto by bolo v poriadku iba ak by hľadané číslo mohlo byť 6, lenže to by sme prišli o deliteľ 5.

Existuje jedno číslo, ktoré má súčet deliteľov o 4 väčší ako ono samo, a to je číslo **9**. Existujú dve čísla, ktoré majú súčet deliteľov o 15 väčší ako ony samy, a to čísla **16** a **33**.

Bodovanie:
každé číslo je deliteľné sebou samým a jednotkou – 1b.; riešenie 9 s odôvodnením, že iné číslo nevyhovuje – 1b.; riešenia 16 a 33 s odôvodnením, že iné čísla nevyhovujú – 3b.

Úloha S5: Sezam, otvor sa. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Najlepšie, čo môžeme na začiatku spraviť, je vypísať si niekoľko začiatočných riadkov a hľadieť na ne až dokým nás neosvieti myšlienka. Pozrime sa na prvých 8 riadkov.

1.	X	Číta sa rovnako z oboch strán?	Áno
2.	O		Áno
3.	OX		Nie
4.	**O**X**O**		Áno
5.	**OX**O**XO**		Áno
6.	**OXO**XO**OXO**		Nie
7.	**OXOXO**OXO**OXOXO**		Áno
8.	**OXOXOOXO**OXOXO**OXOOXOXO**		Áno

Na konci každého nového riadku sa objavuje obrátená verzia spred dvoch riadkov. Toto vieme zo zadania a vidíme to aj v našom výpise. Nebolo by fajn zistiť, že tá istá časť, ktorá pribudla na koniec, tvorí zároveň aj začiatok nášho riadku? Veru bolo, a letmý pohľad na vypísané riadky to len potvrdzuje. Vezmime si trebárs riadok 7. Vidíme, že na jeho začiatku aj konci je postupnosť, ktorá je napísaná v 5. riadku. Tieto časti sú vo výpise vyznačené hrubším písmom. Navyše sa zdá, že uprostred sa ukrýva časť, ktorá je rovnaká ako riadok 4. Toto pozorovanie sa zdá byť správne aj pri iných riadkoch (počnúc tým štvrtým). Nebuďme však príliš dôverčiví a poďme toto nové pozorovanie riadne preveriť. Inak by sa mohlo stať, že prídeme o body.

Riadok s poradovým číslom n vzniká zapísaním riadka $n–1$ a hneď vedľa neho riadka $n–2$ v obrátenom poradí. Ale ako vznikol riadok $n–1$? No predsa zapísaním riadka $n–2$ a hneď vedľa neho riadka $n–3$ v obrátenom poradí. Situáciu si môžeme predstaviť aj takto, pričom výraz v hranatých zátvorkách vyjadruje obrátené poradie znakov:

$$n = n–1, [n–2] = n–2, [n–3], [n–2].$$

Toto platí iba pre $n > 3$, keďže $n–3$ musí byť aspoň 1 (žiadny riadok predtým nemáme). Teraz už vidíme, že začiatok a koniec riadku sú rovnaké, iba ten koniec je v obrátenom poradí. Ak by bol teraz stred symetrický (rovnaký spredu aj zozadu), bol by symetrický aj celý riadok. Ak však stred nebude symetrický, nebude to tak ani v prípade celého riadku. Všetko to teda závisí výhradne od riadku s poradovým čísom o 3 menším.

Každý dokáže hravo povedať, že riadky 1 a 2 sú symetrické. To ale znamená, že aj riadky 1+3=4 a 2+3=5 sú symetrické. Taktiež riadky 7, 8, potom 10, 11, 13, 14 sú symetrické, lebo majú o 3 miesta nad sebou symetrický riadok. Nesymetrický je riadok 3, a vďaka tomu aj riadky 6, 9, 12, 15, 18, … a všetky, ktorých poradové číslo je deliteľné 3.

Teraz stačí už len vyčísliť, koľko je ktorých riadkov. 1000 riadkov vieme rozdeliť na 333 trojíc, pričom v každej z nich sú 2 symetrické riadky + 1 nesymetrický, a jeden posledný riadok č. 1000, ktorý je tiež symetrický. Dokopy máme **667** symetrických riadkov.

Bodovanie:
Kto sa pozrel na pár riadkov a rovno vyhlásil, že to bude každý tretí riadok a bez ďalšieho postupu napísal výsledok, dostal **1 bod**. Kto sa k tomu trochu pokúsil zamyslieť, no aj tak sa nechal zlákať ku napísaniu odpovede bez objasnenia – **1,5 bodu**. Najserióznejšie vyzerajúce nápady, ktoré ale neviedli k ukázaniu, že to platí pre všetky riadky, som hodnotil max. **2,5 bodmi**. Kto to nejako rozumne ukázal pre všetky riadky, ale mal tam nezrovnalosti (najmä v ukazovaní, že niektorý riadok NEbude symetrický) – **4 body**. Maximum tradične za **5 bodov**. Za menšie či väčšie numerické chyby ste mohli stratiť **0,2** až **0,5 bodu**.