Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

33. ročník www.pikomat.sk školský rok 2015/2016

Vzorové riešenia 3. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Dlaždice. *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková.*

Predstavme si, že kráľ si zavolal na pomoc „odborníka na dláždenie *12-metrových* chodieb" Adama. Ten sa pozrel na kráľove náčrtky svojím odborným okom a po chvíľke premýšľania vyhlásil, že sa potrebuje poradiť s kolegami.

Adam si dobre uvedomoval, že musí pokryť ľavý horný roh, a to sa dá spraviť buď zvislou, alebo vodorovnou dlaždicou. Tieto dve možnosti ďalej premyslel takto:

1. Umiestnením dlaždice zvislo si vlastne skráti chodbu o jeden meter a zostane mu tak vydláždiť už len jedenásť metrov. Koľkými rôznymi možnosťami to ide, sa môže opýtať svojej kolegyne, odborníčky na dláždenie *11-metrových* chodieb Betky.
2. Ak umiestni dlaždicu vodorovne, tak jediný spôsob, ako pokryť ľavý dolný roh, je umiestniť do neho dlaždicu taktiež vodorovne, presne pod tú prvú. Takto si skráti chodbu o dva metre a zostane mu už len zvyšných desať metrov. Koľkými spôsobmi sa to dá, sa radšej opýta odborníka na *10-metrové* chodby Cyrila.

<u>Na vydláždenie 12-metrovej chodby má teda Adam toľko možností, ako majú jeho kolegovia Betka a Cyril dohromady</u>. Už len zistiť, koľko to je.

Betka a Cyril však prišli zas len s podobnou úvahou ako Adam. Obaja zistili, že podľa typu pokrytia ľavého horného rohu si skrátia chodbu buď o jeden, alebo o dva metre, a teda sa potrebujú opýtať dvoch svojich kolegov. Betka(11) sa musí najprv opýtať Cyrila(10) a ešte zohnať aj odborníčku na *9-metrové* chodby Danicu(9). Cyril(10) sa zas musí opýtať Danice(9), a ešte zatelefonovať odborníkovi na *8-metrové* chodby Emilovi(8).

Naši odborníci dali hlavy dokopy a uvedomili si, že podobne na tom bude aj každý ďalší odborník na dláždenie: *7-metrový* Filip(7), a tiež Gustáv(6), Hanka(5), Ivan(4), Janka(3)... Až chudáci Karol(2) a Lukáš(1) – tí sa už síce nemajú koho opýtať, ale zas také krátke chodby sa dláždia veľmi ľahko: 1-metrovú

Dláždič	Dĺžka	Možností
Lukáš	1 m	1
Karol	2 m	2
Janka	3 m	2+1=3
Ivan	4 m	3+2=5
Hanka	5 m	5+3=8
Gustáv	6 m	8+5=13
Filip	7 m	13+8=21
Emil	8 m	21+13=34
Danica	9 m	34+21=55
Cyril	10 m	55+34=89
Betka	11 m	89+55=144
Adam	12 m	144+89=233

chodbu vie Lukáš(1) vydláždiť iba 1 spôsobom (jediná kachlička); 2-metrovú chodbu vie Karol(2) vydláždiť 2 spôsobmi (vodorovne alebo zvislo).

Na vydláždenie 3-metrovej chodby existuje toľko možností, ako na 2-metrovú a 1-metrovú dohromady, čo je spolu 2+1=3 možnosti. 4-metrová má toľko možností, ako 3-metrová a 2-metrová dokopy, teda 3+2=5 možností. A tak ďalej… **Rôznych rozložení dlaždíc na chodbe je 233.**

Bodovanie:
ak ste povedali, že je to to isté ako usporiadanie 2×2-blokov vodorovných dlaždičiek a zvislých dlaždičiek – 2b.; systém vypisovania všetkých možností – 3b.

Úloha S2: Pre princeznú. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Riešenie tejto úlohy pozostáva z dvoch častí. Najskôr zistíme, aký objem mohol mať spomínaný hranol, a potom dopočítame zvyšné možnosti povrchu. Pekne po poriadku.

Povrch pravidelného štvorbokého hranola určíme ako súčet obsahov všetkých jeho stien. To sú 2 podstavy tvaru štvorca s obsahom $a \cdot a = a^2$, a k tomu 4 rovnaké obdĺžnikové steny plášťa s obsahom $a \cdot b$, pričom a je hrana podstavy, b je výška. Môžeme teda napísať a hneď aj upraviť:

$918 = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot b$ // vydelíme 2
$459 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b$ // vydelíme a
$459/a = a + 2 \cdot b$

a	*459/a, čiže a+2b*	*b*	*V = a·a·b* [cm³]
1	459	229	229
3	153	75	675
9	51	21	1701
17	27	5	1445

Keďže a, b sú prirodzené čísla, 459 by sa malo dať bezo zvyšku vydeliť číslom a. Kto má veľa času, vyskúša 459 vydeliť všetkými číslami od 1 po 459. Kto toľko času nemá, všimne si, že výsledkom delenia bude $a+2 \cdot b$, čo je nutne väčšie ako a (keďže b je kladné). Nemá preto význam deliť 459 číslom väčším, než je samotný výsledok delenia. Tento prípad nastane niekde okolo 21, čím si ušetríme kopu času. Poctivým vyskúšaním možností 1 až 21 sa dostávame k rozmerom v Tabuľke 1.

Žiadne iné a, menšie než 22, nám nedá celočíselný podiel. V tabuľke vidíme jednotlivé prípady rozmerov hranolov, ktoré majú povrch 918 cm^2, a rovno sme si vyčíslili aj ich objemy. Jeden z týchto objemov vyslovila aj učiteľka, len ju deti nepočuli. My musíme zistiť, ktorý to bol, a určiť všetky možné povrchy pre daný objem. Čo teraz ideme robiť? Vezmeme si po poriadku každý objem a skúsime nájsť všetky možnosti a, b tak, aby sa objem nezmenil. Pomôžeme si prvočíselným rozkladom objemov. Tak sa nám budú rozmery hľadať jednoduchšie.

Začnime s 229. To je samo o sebe prvočíslom, čo znamená, že nech násobíme ako násobíme, stále musí jeden z činiteľov byť 229 a tie zvyšné musia byť 1. Dostávame tak jedinú možnosť $a=1$, $b=229$ s povrchom 918. Úloha však má mať 4 riešenia. Učiteľka teda nemohla vysloviť objem 229. Pokračujme so $675 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Myslime na to, že za a musíme dosadiť také číslo, ktoré je v našom rozklade aspoň 2-krát. Trocha pokombinujeme, porozpisujeme možnosti, až zistíme, že pre a pripadajú do úvahy tieto možnosti: *a=3, a=5, a=3·5=15,* a tiež *a=1*. Toto nám dáva až 4 možnosti rozmerov, čiže 4 rôzne povrchy, a tak sme práve našli jednu sadu riešení. Vypísané sú nižšie v prehľadnej tabuľke. Ako to už v Pikomate chodí, správne riešenie nás nezastaví, hľadáme systematicky ďalej, až kým nevyčerpáme všetky prípady.

Objem 1701 vieme rozložiť na 3·3·3·3·3·7. Po chvíli objavíme možnosti: *a=3, a=3·3=9, a=1*. Čiže len 3 možnosti, čo nesedí so zadaním. Rozložíme ešte 1445 = 5·17·17, len aby sme zistili, že sú tu iba 2 možnosti: *a=17, a=1*. Naše predošlé zistenia sú zhrnuté v tabuľke.

V [cm^3]	*a*	*b*	*S* [cm^2]	Možnosti
229	1	229	918	1
675	1	675	2702	**4**
	3	75	918	
	5	27	590	
	15	3	630	
1701	1	1701	6806	3
	3	189	2286	
	9	21	918	
1445	1	1445	5782	2
	17	5	918	

Teraz je už jasné, že prepočutý objem bol 675 cm^3, pretože iba ten ponúka 4 možnosti pre povrch hranola. Zvyšné 3 riešenia úlohy popri 918 sú 2702, 590 a 630 cm^2.

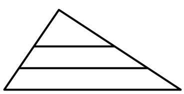
Bodovanie:
uvedenie a úpravu vzorca pre povrch a hľadanie vhodných rozmerov – 1b.; nájdenie všetkých prípadov objemu hranola (zhruba ako v 1. tabuľke) - 1,5b.; úvahy pri hľadaní možností povrchov pre jednotlivé objemy – 1b.; nájdenie všetkých možností a završenie správneho riešenia - nájdenie odpovede – 1,5b.; zábudlivci mohli prísť o 0,2 až 1b. podľa toho, ako veľa možností či úvah vo svojom riešení opomenuli.

Úloha S3: Koláč. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

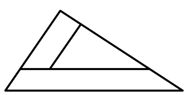
V tejto úlohe sme nepotrebovali dokázať, koľko spôsobov rozdelenia existuje, dokonca sme ani nemuseli nájsť ten, ktorý by to rozdelil na tri lichobežníky s rovnakým obsahom (to ostane ako bonusová úloha na dlhé jarné večery pre Vás). Stačilo nájsť jeden spôsob, ako to ide, a tým bola úloha vyriešená.

Lenže, ako vieme, v Pikomate sú body nielen za riešenie, ktorým je v tomto prípade **postup** (návod) „rozdelíme to takto a takto“, ale aj za **postup** (myšlienky), ako sme na to prišli. Všimnime si dva rôzne významy slova „postup“ v predošlej vete. Ten druhý – ako sme na to prišli – by sme vedeli aplikovať aj vtedy, ak by úloha nemala riešenie (ak by také rozdelenie trojuholníka neexistovalo), a vtedy by sme tými myšlienkami prišli na to, že to teda nejde...

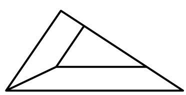
Trojuholník, s ktorým začíname, má 3 uhly. Buď bude vo výsledku patriť každý inému lichobežníku, alebo budú dva patriť tomu istému. Dajme tomu, že by spodné dva uhly patrili jednému lichobežníku (Obr. 1–2). Potom nám ostane rozdeliť ten horný trojuholník na dva lichobežníky, čo sa nám nepodarí. A nepodarí sa nám to ani keby sme



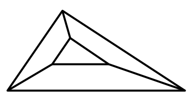
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

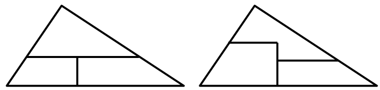


Obr. 4

tie spodné uhly rozdelili a časť by patrila jednému lichobežníku a časť druhému (Obr. 3–4). Na Obr. 4 síce už máme tri lichobežníky, ale ešte aj malý trojuholníček v strede, ktorý nechceme. Keby sme sa ho snažili odstrániť približovaním niektorých strán, tak sa nám z niektorých lichobežníkov stanú trojuholníky.

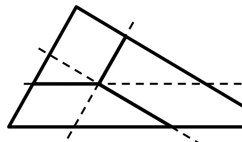
Úplný dôkaz toho, že to takto nepôjde, to nie je, ale to teraz ani nepotrebujeme, ak sa nám podarí nájsť inú možnosť, ako to ide.

Skúsme teda to, že kadžý uhol bude patriť inému lichobežníku. To znamená, že každá strana trojuholníka bude rozdelená na dve časti – jedna patrí jednému lichobežníku a druhá druhému. Ak by takto susedili dve základne dvoch rôznych lichobežníkov, to čo by nám ostalo, by nebol tretí lichobežník (Obr. 5).



Obr. 5

Preto musia susediť základňa jedného a rameno druhého lichobežníka. To znamená, že na každej strane trojuholníka leží jedna základňa. Čiže ku každej strane si môžme spraviť rovnobežku, kde bude druhá základňa príslušného lichobežníka. Ak sa tieto tri rovnobežky nebudú pretínať v jednom bode, vznikne nám v streden malý trojuholník, ktorý nechceme. Ale keď sa pretnú v jednom bode… (Obr. 6)



Obr. 6

<u>Bodovanie</u>:
Ja viem, keď už na to raz prídete, tak je to jasné, ale na plný počet bodov bolo treba napísať aj pár slov k tomu, ako ste na to prišli…

Úloha S4: Vyšetrovanie. *Opravovali Michaela Dlugošová a Peter Onduš.*

Máme troch podozrivých: Akim, Hugo, Horác. Vieme, že kradol iba jeden z nich – máme teda tri možnosti, ktoré musíme preveriť. Na všetky prípady sa postupne pozrime podrobnejšie.

1) Ak kradol Akim. Vtedy Akim klamal, že vraj *„Kradol Horác“*. Hugo hovoril pravdu, že *„Ja som nekradol.“* Horác povedal *„Aspoň dvaja klamú*.“ Ak by toto mala byť pravda, museli by tí dvaja klamári byť jedine Akim a Hugo, obaja naraz. Lenže Hugo neklamal. Takže Horácova veta nemôže byť pravda. Ak by jeho veta mala byť lož, musel by klamať najviac jeden z nich. Lenže ak je jeho samotná veta už lož, tak už klamú dvaja – Akim a on sám Horác. Ani jedna možnosť nevyhovuje, a preto bol zrejme zlý už náš prvotný predpoklad. Zrejme teda **Akim nekradol**.

2. Ak kradol Hugo. Vtedy Akim klamal, že vraj *„Kradol Horác“*; a klamal aj Hugo, keď sa vyhováral, že *„Ja som nekradol.“* Takže klamali aj Akim aj Hugo, čo sú už dvaja, a tým pádom je Horácova veta *„Aspoň dvaja klamú“* pravdivá – Horác hovoril pravdu. To hneď aj znamená, že Horác musel na kráľovu poslednú otázku odpovedať pravdivo, teda <u>kráľ počul meno Hugo</u>.

3. Ak kradol Horác. Vtedy Akim hovoril pravdu – „*Kradol Horác*“; aj Hugo hovoril pravdu – „*Ja som nekradol.*“ To sú už dvaja pravdovravní, a teda Horácove tvrdenie „*Aspoň dvaja klamú*“ sa nemôže nijako naplniť, teda Horác klamal. To znamená, že Horác na kráľovu poslednú otázku odpovedal nepravdivo, teda kráľ počul buď meno Hugo, alebo meno Akim.

Ak kráľ počul od Horáca meno Hugo, nevedel by určiť, či kradol Hugo (možnosť 2), alebo Horác (možnosť 3). V zadaní sa ale píše, že kráľ vedel určiť zlodeja. To môže znamenať jediné: na poslednú otázku dostal odpoveď „*Akim*“, a to mohlo nastať jedine v prípade, keď **kradol Horác**.

Bodovanie:
odpoveď – 1b.; vylúčenie ostatných – 2b.; odôvodnenie, prečo kradol Horác – 2b.

Úloha S5: Ktorá kocka? *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula.*

Najskôr treba zistiť, ako vlastne mohli vyzerať tie dve kocky, ktoré ležali pred kráľom. Musíme preto zistiť, ako by mohli vyzerať všetky kocky, ktoré majú ofarbené 3 steny namodro. Skúsme si teda zvoliť na začiatok 2 steny, a potom k nim zvoliť tretiu, aby sme nezabudli na niektorú možnosť. V takomto prípade máme na výber len 2 možnosti, buď budú tie 2 steny oproti sebe, alebo budú pri sebe (a teda budú mať spoločnú jednu hranu).

Ak sú ofarbené steny oproti sebe, tak je jedno, ktorú stenu ofarbíme ako tretiu, pretože v každom prípade bude mať jednu spoločnú hranu s oboma už ofarbenými stenami a tým vždy vznikne rovnaké ofarbenie.

Ak sú ofarbené steny pri sebe (teda zdieľajú jednu spoločnú hranu), máme 2 možnosti:

- Ofarbíme takú stenu, ktorá je oproti niektorej už ofarbenej steny, čím vznikne rovnaké ofarbenie ako v predošlom prípade
- Ofarbíme stenu, ktorá nie je naproti žiadnej už ofarbenej stene. Takéto steny sú ešte na kocke dve, ale nech ofarbíme ktorúkoľvek z nich, tak nám vznikne trojica stien, ktoré majú spoločný jeden roh, a teda sa jedná o to isté ofarbenie.

Existujú len dve možné ofarbenia, a preto pred kráľom mohli ležať jedine tieto dve kocky.

Keďže obe kocky majú nafarbené 3 steny namodro, tak vieme, že po rozsekaní veľkej kocky na $n \times n \times n$ malých kocôčok bude na týchto kocôčkach spolu rovnaký počet malých modrých stien. My však chceme zistiť, z ktorej z pôvodných kociek vznikne viac takých kocôčok, ktoré majú aspoň jednu stenu modrú. Keďže týchto stien je spolu v oboch prípadoch $3n^2$, tak jediné, v čom môže byť rozdiel, že počet kocôčok, ktoré majú ofarbenú viac ako jednu stenu. Preto od počtu stien potrebujeme odrátať všetky kocôčky, ktoré majú ofarbené dve steny (lebo tie sme tam zarátali dvakrát), a dvakrát musíme odrátať všetky kocôčky, ktoré majú 3 steny modré, pretože tie sme zarátali trikrát, ale v skutočnosti sa jedná len o jednu kocôčku.

Ak sú na kocke ofarbené niektoré dve protiľahlé steny, tak tá stena, ktorá ich spája, má s každou z nich toľko spoločných kocôčok, aká je dlhá strana, teda n. V takomto prípade teda máme 2n kocôčok, ktoré majú ofarbené dve steny. Počet kocôčok s aspoň jednou stenou je v tomto prípade $3n^2 – 2n$.

Ak nie sú ofarbené žiadne protiľahlé steny, tak má každá stena s každou jednu spoločnú hranu. Vieme však, že jednu kocôčku majú spoločnú všetky 3 tieto steny, a teda táto malá kocôčka má ofarbené až 3 steny (preto ju budeme musieť odrátať až dvakrát). Ostali nám ešte 3 spoločné hrany, z ktorých sme však už vyňali tú jednu spoločnú kocôčku, a teda na každej z nich sa nachádza už len (n–1) kocôčok s dvoma ofarbenými stenami, čo je spolu (3n–3) kocôčok. Počet kocôčok s aspoň jednou modrou stenou je v tomto prípade $3n^2 – (3n–3) – 2 = 3n^2 – 3n+1$.

Keď chceme zistiť, aký je rozdiel medzi nimi, tak nám ich stačí odrátať od seba:

$3n^2 – 2n – (3n^2 – 3n+1) = 3n^2 – 2n – 3n^2 + 3n – 1 = \mathbf{n – 1}$.

Vidíme, že kocka, kde sú modré steny oproti sebe, má o (n–1) kocôčok s aspoň jednou modrou stenou viac. To znamená, že ak Daky a Seny rozrežú kocky spred kráľa na 7×7×7 kocôčok, tak kocka osudu bude mať o 6 kocôčok s aspoň jednou modrou stenou viac, ako falošná kocka.

Bodovanie:
zistenie a odôvodnenie jediných možných kombinácií nafarbenia stien – 1b.; určenie rozdielu počtu hľadaných kocôčok – 0,5b. za každý z prípadov; prečo je rozdiel hľadaných kocôčok práve taký – 3b.; pri vysvetlení iba prípadu 7×7×7 – maximálne 1b.