Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

34. ročník www.pikomat.sk školský rok 2016/2017

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Hádanka – *Opravoval Martin „Malic“ Handlovič*
Demetros sa rozhodol preskúšať svojich troch najstarších synov Alexandra, Basilia a Cyrusa. Podal im tri obálky so slovami: „V každej z nich je jedno prirodzené číslo väčšie ako nula a ich celkový súčet je 14.“ Všetci traja otvorili svoje obálky (bez toho, aby číslo vnútri ukázali svojim bratom) a potom postupne povedali:
Alexander: „Viem, že Basilius a Cyrus majú rôzne čísla.“
Basilius: „Ja už som aj predtým vedel, že všetky tri naše čísla sú rôzne.“
Cyrus: „Ja už teraz viem, aké máme všetci čísla.“
Ako to mohol Cyrus zistiť? Aké tri čísla mali bratia?

Synov si označme prvými písmenami ich mien: **A**lexander, **B**asilius, **C**yrus. Najprv nám **A** hovorí, že **B** a **C** majú rôzne čísla. Ako na to **A** prišiel? **Ak by mal A párne číslo**, tak by súčet čísel **B** a **C** bol tiež párne číslo (celkový súčet 14 mínus párne číslo dáva iné párne číslo). To by ale práve znamenalo, že **B** a **C** by mohli mať rovnaké čísla, pretože ich párny súčet by sa elegantne dal rozdeliť na polovicu. To je však v rozpore s **A**lexandrovou vetou, a tak sme práve zistili, že **A má nepárne číslo**.

Ďalej hneď vylúčime čísla 12 a 13. Tieto nemôže mať nikto, jednoducho lebo sú príliš veľké a aj keby zvyšné dve čísla boli najmenšie možné – 1 a 2 – prekročil by sa súčet 14.

Basiliovu vetu *„všetky tri čísla sú rôzne“* si môžeme rozdeliť na dve samostatné informácie, akoby bol povedal: *1) „Viem, že A a C majú rôzne čísla.“ 2) „Viem, že nikto nemá také číslo ako ja.“* Prvá časť funguje úplne rovnako ako v prvom odseku, a teda z nej vieme usúdiť, že **B má nepárne číslo.** Z druhej časti navyše vyplýva, že **B**asiliovo číslo musí byť určite **väčšie alebo rovné 7**. Iba vtedy si totiž **B** môže byť istý, že nikto nemá rovnaké číslo ako on, pretože inak by sa prekročil súčet 14. Okrem toho, ak má **B** číslo väčšie alebo rovné 7, tak potom **A** musí mať číslo **menšie ako 7** (opäť kvôli neprekročeniu celkového súčtu 14). Potom sa už ľahko dopátrame k tomu, že **C musí mať číslo párne,** a keďže tiež musí byť menšie ako 7, tak to bude **2, 4, alebo 6**.

Všetky možné kombinácie, aby súčet bol 14, si zapíšeme do prehľadnej tabuľky:

A	1	1	1	3	3	5
B	11	9	7	9	7	7
C	2	4	6	2	4	2

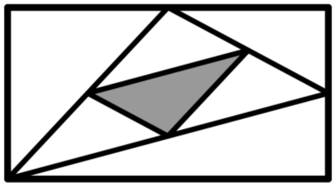
Ostáva nám posledná informácia, že **C** vedel jednoznačne určiť všetky čísla. Z tabuľky vidno, že pre **C**=2 aj pre **C**=4 existuje viacero možností. Medzi týmito by sa chudák **C**yrus istotne nevedel rozhodnúť a nevedel by tak sebaisto povedať, ktorý brat má aké číslo. Zato v prípade **C**=6 je iba jediná možnosť, ako môžu byť čísla usporiadané. Z toho vieme, že **C** musel mať práve toto číslo **6**. **Alexander mal číslo 1, Basilius mal číslo 7 a Cyrus číslo 6.**

Bodovanie:

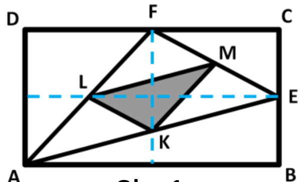
nájdenie správneho riešenia – 1b.; vysvetlenie nepárneho čísla pre **A** – 1b.; vysvetlenie nepárneho čísla väčšieho alebo rovného 7 pre **B** – 1b.; vysvetlenie párneho čísla pre **C** – 1b.; úspešné nájdenie jedinej správnej odpovede – 1b.

Úloha S2: Záhrada – *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková*

Záhrada mala tvar veľkého obdĺžnika s rozlohou 160 m^2. Záhrada bola rozdelená chodníkmi na sedem záhonov. Každý chodník mal začiatok a koniec buď v rohu záhrady, v strede strany záhrady alebo v strede iného chodníka tak, ako na obrázku. **Aký bol obsah stredného (sivého) záhonu?**



Vypočítať obsah trojuholníka KLM hneď priamo by bolo veľmi ťažké. Čo keby sme si najskôr vypočítali obsah trojuholníka AEF? To sa dá spraviť niekoľkými spôsobmi. My si ukážeme jeden z tých, ktoré sa v riešeniach vyskytovali najčastejšie.



Obr. 1

Rozdelíme si obdĺžnik ABCD tak, ako na Obr. 1. Takto sme obdĺžnik rozdelili na 4 zhodné menšie obdĺžničky, ktoré majú v porovnaní s obdĺžnikom štvrtinový obsah, teda obsah $\mathbf{40\ m^2}$. Pre trojuholník ABE platí, že jeho prepona je uhlopriečkou dvoch spojených obdĺžničkov. A keďže uhlopriečka delí obdĺžnik na 2 časti s rovnakým obsahom, tak trojuholník ABE tvorí polovicu z obsahu 2 obdĺžničkov, čo je $40 \cdot 2/2 = \mathbf{40\ m^2}$. Podobne aj prepona trojuholníka ADF je uhlopriečkou dvoch spojených obdĺžničkov, takže má taktiež obsah $\mathbf{40\ m^2}$. Prepona trojuholníka ECF je uhlopriečkou iba jedného obdĺžnička, a preto má polovičný obsah $40/2 = \mathbf{20\ m^2}$.

Keď už poznáme obsahy krajných trojuholníkov, vieme jednoducho určiť obsah trojuholníka AEF. Ten dostaneme odčítaním obsahov trojuholníkov ABE, ADF a ECF od obsahu obdĺžnika ABCD: $\boldsymbol{S_{AEF} = S_{ABCD} - (S_{ABE} + S_{ADF} + S_{ECF}) = 160 - 100 = 60\ m^2}$.

Už teda vieme, že trojuholník AEF má obsah $60\ m^2$. Skúsme na vypočítanie obsahu KLM použiť rovnaký postup – určiť obsahy ostatných trojuholníkov. Vezmime si napríklad trojuholník AKL. Jeho strana AK má polovičnú dĺžku v porovnaní s AE. Taktiež AL je polovicou z AF. Oba trojuholníky AEF aj AKL majú rovnaký uhol pri vrchole A. Z toho vyplýva, že trouholníky AEF a AKL sú podobné s koeficientom podobnosti 2. Takže trojuholník AKL má v porovnaní s AEF polovičnú základňu a aj polovičnú výšku. To znamená, že jeho obsah je štvrtinový – $\mathbf{15\ m^2}$.

Rovnakú úvahu môžeme aplikovať aj pre trojuholníky KEM a LMF, ktoré majú preto tiež obsah $\mathbf{15\ m^2}$. Už nám len stačí dopočítať obsah trojuholníka KLM:

$$\boldsymbol{S_{KLM} = S_{AEF} - (S_{AKL} + S_{KEM} + S_{LMF}) = 60 - 45 = 15\ m^2}.$$

Obsah stredného záhonu je teda $\mathbf{15\ m^2}$.

Bodovanie:

myšlienka, že obsah KLM zrátame z obsahu AEF a obsah AEF vieme zistiť odčítaním obsahov pravouhlých trojuholníkov od obsahu obdĺžnika – 1b.; určenie obsahov krajných pravouhlých trojuholníkov – 2b.; určenie obsahu stredného trojuholníka KLM z veľkého trojuholníka AEF – 2b.; iba výsledok bez postupu – 1b. Body ste najčastejšie stratili za to, že ste nevysvetlili, ako ste zrátali obsahy pravouhlých trojuholníkov a prečo je trojuholník AEF rozdelený na 4 zhodné trojuholníky.

Úloha S3: Štvorciarov problém *– Opravovala Katarína „Katka“ Marčeková*

„Pred chvíľou sa ma bol spýtať jeden Spýtagorejec, či by som mu vedel vyrobiť štvorcovú dosku, na ktorej by bolo napísané jediné štvorciferné číslo ABCD. Číslo ABCD však musí byť čo najväčšie a ešte k tomu deliteľné bezo zvyšku číslami BCD, CD aj D.“ **Aké číslo mal štvorciar napísať na dosku?**

Hľadáme najväčšie štvorciferné číslo so zadanou vlastnosťou, preto začeme hľadať medzi číslami, ktoré sa začínajú cifrou 9. Hľadáme teda číslo $9BCD$, ktoré je deliteľné číslami BCD, CD a D. Vieme, že číslo $9BCD$ je násobkom čísla BCD, preto ho môžeme zapísať ako $9BCD = k \cdot BCD$, kde k je prirodzené číslo. Poďme sa teraz pozrieť na to, čo sa stane, ak od odoch strán rovnice odpočítame číslo BCD.

$$9BCD = k \cdot BCD \ /{-BCD}$$

$$9BCD - BCD = k \cdot BCD - BCD$$

$$9000 = BCD \cdot (k - 1)$$

Po odpočítaní BCD od pôvodnej rovnice sa dostávame k novej, ktorá hovorí, že aj číslo 9000 je násobkom BCD. Ďalej si treba uvedomiť, že cifra D nemôže byť nula, lebo potom by sme ňou nemohli deliť. Číslo BCD, ktoré hľadáme, je teda najväčší trojciferný deliteľ čísla 9000, ktorý nekončí nulou. Aby sme ho našli, rozložíme si číslo 9000 na prvočísla, z čoho ľahko uvidíme, akými číslami je deliteľné.

$$9000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Aby hľadaný deliteľ nekončil nulou, nemôže sa v jeho prvočíselnom rozklade nachádzať 2 a 5 súčasne (lebo $2 \cdot 5 = 10$ a každé číslo deliteľné desiatimi končí nulou). Môžeme teda kombinovať buď dvojky a trojky, alebo päťky a trojky. Ak by sme kombinovali dvojky a trojky, vedeli by sme vyrobiť maximálne $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$, čo je ale dvojciferné, preto to nemôže byť naše BCD. Ak budeme kombinovať päťky a trojky, vieme vyrobiť najviac $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 1125$, čo je už štvorciferné, preto nám to tiež nevyhovuje. Druhé najväčšie číslo tvorené súčinom trojok a pätiek získame, ak vynecháme jednu trojku: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 375$. Číslo 375 nám vyhovuje a teda naším kandidátom na číslo $ABCD$ je

9375. Treba už len overiť, či je 9375 deliteľné číslami 375, 75 a 5. To zvládneme veľmi jednoducho a môžeme sa radovať, že sme našli správne číslo. Je ním **9375**!

Bodovanie:

myšlienka, že sa oplatí začať prvou cifrou 9 – 0,5b.; úvaha, že cifra D nemôže byť nula – 1b.; vysvetlenie, že BCD delí 9000 – 2,5b.; správny výsledok – 1b.

Úloha S4: Tabuľky – *Opravoval Martin „Panda" Svetlík*

Dievča nieslo niekoľko hlinených tabuliek a na každej bola napísaná práve jedna cifra (číslica 0–9). Ako tak dievča kráčalo, zrazu sa potklo na nerovnostiach v dlaždiciach a *všetky* tabuľky s ciframi sa jej rozsypali. Keď sa Polonius pozrel na rozsypané tabuľky, zbadal, že sa náhodou rozhodili po zemi tak, že boli pekne v rade a tvorili tak niekoľkociferné číslo, nazvime ho *A*. Polonius si ho zapamätal. Ako dievča dvíhalo tabuľky, znovu sa jej všetky rozsypali pekne do radu a vytvorili tak na zemi niekoľkociferné číslo, nazvime ho *B*. Polonius si zapamätal aj toto. Potom si z čísel *A* a *B* vybral to menšie a odpočítal ho od toho väčšieho a dostal číslo *C*. **Je číslo *C* vždy násobkom čísla 9? Nezabudni svoju odpoveď zdôvodniť.**

Táto úloha v podstate nie je ani tak ťažká, ako je trochu ošemetné vysvetliť ju správne matematicky. Keďže sa budeme baviť o tom, či niečo je alebo nie je násobok deviatky, budú nás určite zaujímať ciferné súčty. Všimnime si, že vzniknuvšie čísla A aj B majú vždy rovnaký ciferný súčet, keďže vznikli z tých istých cifier (z tých istých rozsypaných tabuliek), akurát v inom poradí.

Začneme tým, čo mnohým z Vás napadlo ako prvé – **ak by boli obe čísla násobkom deviatky, tak by ich rozdiel bol určite tiež násobkom deviatky**.

Napríklad keby dievčina mala tabuľky s ciframi 2, 5, 6, 7, 7 a vznikli by z nich čísla napríklad 76752 a 27756. Obe majú rovnaký ciferný súčet 27, čiže sú deliteľné deviatimi, čiže aj ich rozdiel je deliteľný deviatimi. Číslo, ktoré je deliteľné deviatimi, totiž môžeme napísať ako $9 \cdot x$ (čítaj „deväť-krát-niečo"). A tým pádom rozdiel takýchto dvoch čísel bude $9 \cdot u - 9 \cdot v = 9 \cdot (u - v)$, čiže opäť deväť-krát-niečo.

No ale čo ak nebude mať dievčina také dobré tabuľky, ale nejaké so „zlým" ciferným súčtom? Napríklad 3, 5, 7, 8 (ciferný súčet 23, čo nie je deliteľné deviatimi, lebo to dáva **zvyšok 5**). Môže z toho vzniknúť napríklad číslo 3578, ktoré dáva po delení deviatimi **zvyšok 5**. Alebo napr. 7385, čo tiež dáva **zvyšok 5**. To vôbec nevyzerá byť náhoda. Niektorí z Vás to už tušia, niektorí ešte pár čísel vyskúšajú, no vyzerá to tak, že všetky čísla z rovnakých cifier dávajú po delení deviatimi ten istý zvyšok, a to dokonca taký istý ako dáva ich ciferný súčet po delení deviatimi (preto aj platí, že keď je ciferný súčet deliteľný deviatimi – dáva zvyšok nula, tak aj číslo je deliteľné deviatimi – dáva tiež zvyšok nula).

Dôležitá vec – ukážeme si, že nás zdanie neklame a že je to naozaj tak. Napríklad ak by bola cifra 7 na mieste stoviek, mala by hodnotu $700 = 7 \cdot 100 = 7 \cdot 99 + 7 \cdot 1$, a z toho $7 \cdot 99$ je zjavne deliteľné deviatimi, a do zvyšku nám prispieva len hodnotou $7 \cdot 1$. Keby bola cifra 7 na mieste napr. tisícok, tak by mala hodnotu $7 \cdot 999 + 7 \cdot 1$, a do zvyšku by aj tak prispievala len svojou hodnotou 7. Toto isté vieme povedať o ľubovoľnej cifre na ľubovoľnom mieste. Je teda jedno, na ktorom mieste je nejaká cifra, do zvyšku po delení deviatimi nám prispeje rovnako – svojou hodnotou. Čiže taký „prvotný zvyšok“ vznikne ako ciferný súčet daného čísla (čiže bude rovnaký pre všetky čísla z daných cifier), a ešte z neho uberieme celé deviatky a dostaneme skutočný zvyšok po delení deviatimi.

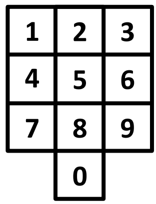
Oukej. Teraz vieme, že keď boli obe čísla A a B z tých istých cifier, museli mať ten istý zvyšok po delení deviatimi, čo vieme zapísať, že obe boli typu deväť-krát-niečo-plus-zvyšok: $A = 9 \cdot u + z,\ B = 9 \cdot v + z$. **No a keď tieto dve čísla odčítame, zvyšky sa nám odčítajú a rozdiel bude zase len deliteľný deviatimi.**

$$9 \cdot u + z - (9 \cdot v + z) = 9 \cdot u + z - 9 \cdot v - z = 9 \cdot (u - v)$$

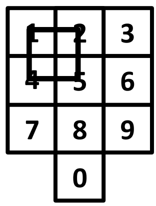
Bodovanie:
Toto je len jeden z možných dôkazov, vyskytli sa asi 3 typy, takže konkrétne bodovanie záviselo od toho, ktorým smerom ste išli. Ak ste došli len po prípad, keď aj pôvodné čísla A aj B sú deliteľné deviatimi a uvideli ste niečo ako $9 \cdot u - 9 \cdot v = 9 \cdot (u - v)$, mohli ste dostať najviac 3 body. V prípade, že ste len vyskúšali pár prípadov odčítania čísel, a nepustili ste sa do hľadania toho, prečo by to malo fungovať vždy, mohli ste dostať 1 bod.

Úloha S5: Rozprávator *– Opravoval Juraj „Juro“ Pavlovič*

Ďalekoprenosný rozprávator vyzeral podobne ako dnešné telefóny. Klávesnica rozprávatora vyzerala ako tá na vrchnom obrázku. Z rozprávatora sa však dalo volať len na rozprávatorové čísla. Rozprávatorové číslo muselo spĺňať tieto vlastnosti:

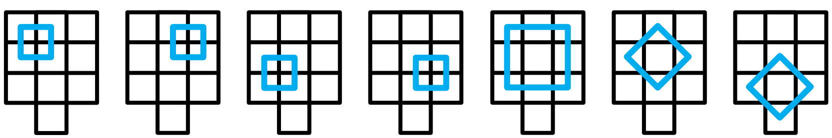


- Muselo mať 9 cifier.
- Všetky cifry museli byť rôzne.
- Muselo byť deliteľné tromi aj piatimi.
- Prvé štyri cifry museli byť zoradené podľa veľkosti od najmenšej po najväčšiu.
- Tlačidlá použité na vytočenie prvých štyroch cifier museli ležať vo vrcholoch štvorca na rozprávatorovej klávesnici. Príklad tlačidiel ležiacich vo vrcholoch štvorca (1, 2, 4 a 5) je na spodnom obrázku.
- Tlačidlá použité na vytočenie posledných štyroch cifier museli takisto ležať vo vrcholoch štvorca.



Koľko rôznych čísel vyhovovalo týmto vlastnostiam?

Asi „najzáludnejšou“ časťou tejto úlohy bolo nájsť na klávesnici všetky štvorice čísel, ktoré ležia vo vrcholoch štvorca. Sú to tieto – Obr. 1.

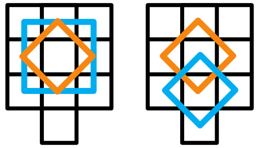


Obr. 1

Podľa zadania jeden takýto štvorec potrebujeme na prvé 4 cifry a jeden takýto štvorec potrebujeme na posledné 4 cifry hľadaného čísla. Okrem toho musia byť všetky cifry rôzne, čo znamená, že potrebujeme nájsť **dva štvorce, ktoré nemajú žiadne spoločné tlačidlo**.

Kombinovať malé štvorce medzi sebou nemá zmysel, pretože vo všetkých je tlačidlo 5. Kombinovať malé štvorce s tým najväčším tiež nevyjde, pretože vždy bude spoločný niektorý roh. Našou poslednou nádejou sú posledné dva „šikmé" štvorce. Keď sa k nim pokúsime nájsť vhodnú dvojicu, natrafíme na tieto dve možnosti – Obr. 2.

Ďalšia podmienka zo zadania hovorí, že výsledné číslo musí byť deliteľné 5. To znamená, že číslo musí končiť cifrou 0 alebo 5. To je ale zlá správa pre možnosť „A" na Obr. 2. Táto totiž neobsahuje ani 0, ani 5. A keďže vo vrcholoch vyznačených štvorcov majú ležať práve posledné 4 cifry, a cifru 0 alebo 5 potrebujeme na poslednom mieste, tak je nevyhnutné, aby bola aj vo vrchole niektorého štvorca.



A **Obr. 2** B

Ostala nám teda iba možnosť B (Obr. 2). Keďže spodný štvorec 5-7-9-0 obsahuje aj 0 aj 5, musí tvoriť posledné 4 cifry, a tým pádom na prvé 4 cifry ostáva druhý štvorec s ciframi 2-4-6-8. Vo výslednom čísle už chýba iba prostredná cifra a núkajú sa posledné dve nepoužité cifry 1 a 3. Tu nám príde na pomoc podmienka zo zadania, že číslo musí byť deliteľné ešte aj 3. Aby bolo výsledné číslo deliteľné 3, musí byť aj jeho ciferný súčet deliteľný 3. Ciferný súčet doposiaľ vybratých 8 cifier je 5+7+9+0 + 2+4+6+8 = 41. Z toho je jasné, že môžeme pridať jedine 1 (a nie 3), čím dostaneme ciferný súčet 42 (a nie 44). **Prostredná cifra musí byť 1**.

Posledná podmienka, ktorú sme zatiaľ nezohľadnili, hovorí, že prvé 4 cifry majú byť usporiadané od najmenšej po najväčšiu. Tým pádom máme pevne daných prvých 5 cifier: 24681_ _ _ _. A okrem toho vieme, že na poslednom mieste môže byť iba 0 alebo 5. Neostáva iné, ako prehadzovať poradie zvyšných cifier a nájsť tak všetkých 12 riešení – Obr. 3. Hotovo.

246815790	246810795
246815970	246810975
246817590	246817095
246817950	246817905
246819570	246819075
246819750	246819705

Obr. 3

Bodovanie:
overenie aspoň 4 malých štvorcov – 1b.; overenie aj veľkého štvorca – 1,5b.; nájdenie aj šikmých štvorcov – 2b.; určenie jedinej prípustnej dvojice štvorcov – 2,5b.; vyhodnotenie zvyšných podmienok a nájdenie aspoň jedného správneho rozprávatorového čísla – 4b.; všetky riešenia – 5b.