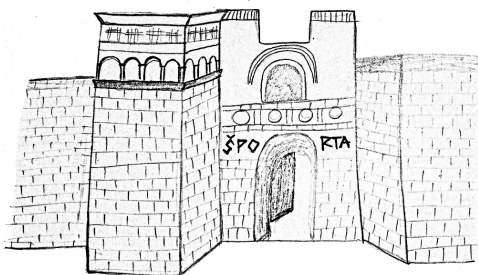


Zadania 3. série zimnej časti, kategória 8–9



Demetros hľadel na obrovské mesto, ktoré sa pred ním otváralo. Miesto toho otrasného športu, ach, ako veľmi dúfal, že tam nikdy nebude musieť vkročiť! A predsa, teraz si uvedomoval, že svojho syna nikdy naozaj nepočúval. A on utiekol! Pokojne sa mu mohlo čokoľvek stať.

Demetros celú cestu len trýpol a rozmýšľal, či je Polonius v poriadku. Kto vie, čo

všetko sa mu mohlo stať na takomto cudzom a nepriateľskom mieste? Na zmiernenie stresu nepomáhala ani rozmýšľanie nad úlohou, ktorú mu povedal jeho známy Euklides.

Úloha S1: Euklidova úloha

Ešte pred odchodom nakreslil Euklides Demetrovi na pláži do piesku lichobežník *PMAT* (s rovnobežnými základňami *PM* a *AT*) a povedal: „Dám Ti tieto informácie o lichobežníku *PMAT* a ty mi povedz jeho obsah:

- *PA* je kolmá na *MT*,
- uhly *MPA* a *MTA* sú rovnako veľké, teda $|\sphericalangle MPA| = |\sphericalangle MTA|$,
- aritmetický priemer dĺžok základní je 8 cm.“

Aký bol obsah tohto lichobežníka? Poznámka: Obsah lichobežníka so základňami *a*, *b* a výškou *h* je $S = h \times (a + b) / 2$.

Demetros vôbec nebol navyknutý na to, že by sa nemuselo všetko diať podľa jeho predstáv. Hneď, ako s ťažkým srdcom vošiel do Športy, sa vybral rovno do centra, na Športské športové zastupiteľstvo.

Na námestí pred ním práve odovzdávali medaily za zmiešanú štvorhru v tenise. Na pódiu boli nastúpené tri páry a preberali si ocenenia.

Úloha S2: Ceremónia

Vtom zaznelo „Zoradiť, pooooozor!“, a tak sa všetci šiesti, tak ako boli, rýchlo postavili vedľa seba a v pozore hľadeli na ceremoniára. Ten ďalej zavelil „Otočka!“, a tak sa všetci otočili o 90 stupňov, takže teraz stáli v zástupe. Niektorí sa však otočili doľava, niektorí doprava...

Demetros si všimol, že teraz stáli v zástupe tak, že *každá* tenistka mala svojho partnera niekde *pred sebou*. **Koľko rôznych zástupov spĺňa túto podmienku?** Poznámka: Zástupy považujeme za rôzne, keď je niekto na inom mieste alebo inak otočený. Napríklad zástup tenistka, tenistka, tenistka, tenista, tenista, kde sa všetci pozerajú z pohľadu ceremoniára doprava a rovnaký zástup, kde sa posledný tenista pozerá z pohľadu ceremoniára doľava, sú rôzne!

Náš Matematénčan sa na okamih zamyslel, už-už chcel vojsť dnu, keď tu započul hlasy v záhrade za budovou. Vybral sa teda tam a keď vošiel do záhrady, prihovoril sa skupine mladíkov, ktorí práve hrali vybíjanú. Tí mu povedali, že má šťastie a že Nikomeda nájde o kus ďalej v záhrade. Bolo to presne tak. Medzi stromami precvičoval lukostreľbu najväznejší a najslávnejší športovec tohto športového mesta.

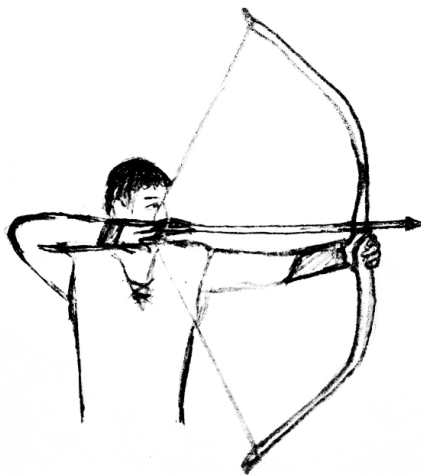
„Haló? Nikomedes? Ja som Demetros. Matematik,“ zahlásil Demetros hrdó, podávajúc Nikomedovi ruku.

Športovec ju zobral a silno potriasol, trochu viac, ako bolo nutné. „Nuž, ja som Nikomedes, ako isto vieš. Športovec. Čo tu chceš?“

„Nevieš náhodou...“ Demetrovi sa zachvel hlas ako videl Športánov nepriateľský pohľad, „nevieš, kde by som mohol nájsť svojho syna? Ušiel z domu, uprednostnil šport a ja som mu to dokonca ochotný dovoliť, len keby som ho mohol nájsť...“

Nikomédova tvrdá tvár ihneď zvlúdnela. „Viem úplne, ako sa cítiš. Šport je pre mňa neskutočne dôležitý. Keby sa však niektorá z mojich dcér rozhodla pre niečo

iné, nemohol by som jej to odmietnuť, hoci by ma to veľmi ranilo.“ Chvíľu zamyslene stál a potom odložil luk na zem. „Pod', pomôžem ti nájsť tvojho syna.“ Nechal luk aj terč v záhrade a vybral sa smerom do budovy. Demetros ešte chvíľu začudovane hľadel na cvičný terč, ktorý bol veľmi zvláštny.



Úloha S3: Lukostreľba

Terč pozostával z 8 menších terčikov ležiacich na kružnici. Na začiatku mal každý terčik jednu z dvoch farieb – červenú alebo zelenú. Prestrelenie šípu cez červený terčik nič nerobilo. Prestrelenie šípu cez zelený terčik spôsobilo, že tento terčik spadol a jeho dva susedné terčiky zmenili farbu: červený sa zmenil na zelený, a naopak. Ak bol niektorý zo susedných terčikov už spadnutý, ostal spadnutý. Spadnutý terčik už nič nerobil. Terč bol porazený až vtedy, keď boli popadané všetky terčiky. **Dal sa terč poraziť, ak na začiatku boli a) 1 terčik, b) 2 terčiky, c) 7 terčikov, d) 8 terčikov zelených? Ak sa daný terč poraziť nedal, nezabudni zdôvodniť prečo. Ak sa poraziť dal, nezabudni sa zamyslieť nad všetkými prípadmi.**

Ako tak Demetros rozmýšľal, jeho nový športový priateľ zatiaľ zavolať svoje štyri dcéry. „Pošlem ich do mesta, určite mladého Polonia nájdu. Bude ale určite poriadne vystrašený. Mohol by si mu poslať niečo, podľa čoho bude vedieť, že si to naozaj ty, jeho otec,“ poradil Demetrovi Nikomedes. Starý matematik len prikývol. Ešte raz dávno si so synom vymysleli spoločné tajné heslo, aby sa mohli spolu potajomky dorozumieť.

Úloha S4: Tajné heslo

Tajné heslo bol trojčiferný kód ABC . Vieme, že súčet $ABC + ACB + BAC + BCA + CAB = 2536$. **Aký bol kód ABC , teda tajné heslo?**

Dievčatá sa, teraz už spolu s tajným heslom, rozutekali po Športe. Netrvalo dlho a brána do záhrady sa znovu otvorila. Vykukla spoza nej najprv strapatá, kučeravá hlava, potom zablatený trup a nakoniec bežal otcovi v ústrety celý živý a zdravý Polonius. Demetros sa zahľadel na previnilého chlapca, ale namiesto očakávaného pokarhania sa Polonius dočkal, neuveriteľne, ospravedlnenia.

„Prepáč mi to, Polonius. Chcel som ťa mať iba podľa svojich predstáv a nikdy som sa nezamyslel nad tým, čo naozaj potrebuješ. Mrzí ma to.“ Polonius iba neveriacky hľadel na svojho otca. Bol to vôbec on?

Čo vlastne robíš tu, v Športe? Ale vysvetlenie prišlo samo, lebo Demetros pokračoval. „Uvedomil som si, že si mal v mnohom pravdu. Tie športy naozaj nie sú také zlé...“

Zrazu dopredu vystúpil Nikomedes a Polonius skoro spadol z nôh. Najslávnejší športovec je tu, s mojím otcom? Nikomedes sa ale na jeho zmätenom prekvapení iba zasmial.

„Trochu sme sa rozprávali s tvojím otcom a myslím, že si nám obom pomohol niečo pochopiť. Rozhodli sme sa preto, že urobíme historicky prvý matematický šport, aby sme zjednotili naše mestá. Demetros mi pomôže s návrhom ihriska.“ Demetros na to odpovedal: „Nevieme však ešte presne, ako by to ihrisko malo vyzerať. Zatiaľ si to predstavujeme takto:“



Úloha 55: Ihrisko

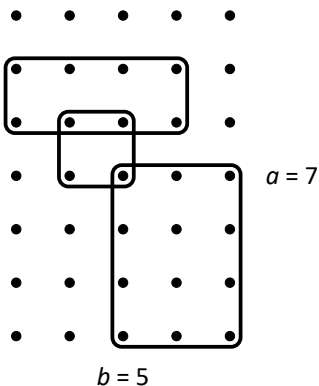
„Do ihriska v tvare obdĺžnika s rozmermi $(a - 1) \times (b - 1)$ chceme natíct stĺpiky, ktoré budú tvoriť pravidelnú štvorčekovú mriežku $a \times b$ stĺpikov (napríklad na obrázku je $a = 7$ a $b = 5$).

Potom by sme chceli povrazom spojiť vždy štyri stĺpiky tak, aby vytvorili obdĺžnik alebo štvorec so stranami rovnobežnými s okrajmi ihriska. Tieto povrazom ohraničené plochy budú bránky (na obrázku sú príklady troch bránok). Veľkosť bránky musí byť aspoň 1×1 .

Nevieme sa však rozhodnúť, kde ich vytvoriť. Chcel som si teda nakresliť všetky možnosti, kde by mohla byť jedna bránka na ihrisku, ale musí ich byť asi riadne veľa, keďže mi nestačila ani najväčšia hlinená doštička.“

Koľko je možností, ako nakresliť jednu bránku na ihrisku? A koľko rôznych obvodov môžu mať bránky?

Príď na všeobecné riešenie.



V Poloniovu sa nezaprela jeho matematická stránka a čoskoro zodpovedal otázku, ktorú mu Demetros položil. Pomohol mu tiež aj vymyslieť, kde by mali byť na ihrisku bránky, aby bol nový šport čo najakčnejší.

Matematénci nakoniec zistili, že športy nezabývajú a že sú vlastne veľmi dobré pre zdravie. Športári sa zase naučili, že matematika je veľmi zaujímavá a nápomocná vec. Dokonca vznikol aj historicky prvý matematický šport. A Polonius sa skoro rozplynul od šťastia, keď tento úžasný nový šport nazvali podľa neho Pólobal alebo len Pólo, hoci do dnešných čias sa už táto pôvodná verzia nezachovala.

Výborne! Tri série zimnej časti Pikomatu sú za Tebou. Už si Vianoce a potom nezabudni prísť na **zimné sústredenie Pikomatu!** Poštár Ti už čoskoro prinesie prihlášku, máš sa na čo tešiť. Uvidíme sa čoskoro.

Svoje riešenia najneskôr **5. decembra 2016:**

- nahraj do **22:00** na **www.pikommat.sk** vo formáte PDF alebo JPG (návod nájdeš na stránke)

ALEBO

- pošli poštou na **PIKOMAT 8–9, P-MAT, n.o. Ambroseho 2, 851 04 Bratislava 5.**

Rozhoduje čas nášho servera, prípadne dátum na pečiatke pošty. Neskoro doručeným riešeniam strhávame body alebo ich vôbec nemusíme akceptovať! Ak Ti niečo nie je jasné, neváhaj a spýtaj sa nás na **pikommat@p-mat.sk**. Riešenia nám však, prosím, e-mailom neposielaj. Tešíme sa na Tvoje riešenia!

Rady Tatka Pikomatka:

- Nezabudni napísať svoj postup aj so zdôvodnením jednotlivých krokov.
- Skús riešenie napísať tak, ako keby si vysvetľoval/-a kamarátom, ako sa takáto úloha rieši.
- Pokús sa nájsť všetky riešenia – vyriešiť úlohu neznamena objavíť jedno riešenie!
- Ak ideš skúšať všetky možnosti, nájdi si nejaký systém, aby sa Ti nestalo, že niektoré možnosti zabudneš vyskúšať. Nezabudni nám o svojom systéme aj napísať – nestačí len „vyskúšal/-a som všetky možnosti“!
- Ak si myslíš, že úloha nemá riešenie, pokús sa aj vysvetliť, prečo ho nemá.
- Keď nevieš, ako ďalej, neprepadaj panike. Najlepšie sa rozmýšľa v klude. Pošli nám aspoň to, čo už máš, aj za to môžeš dostať body.
- Pri geometrických úlohách nestačí len narysovať daný útvar a odmerať dĺžky či uhly potrebné na vyriešenie úlohy. Meranie nikdy nie je dokonale presné, všetky požadované údaje je preto treba vypočítať.
- Ak odovzdávaš riešenia cez internet, nenechávaj si to na poslednú chvíľu, radšej ich odovzdaj o deň skôr, a keby to náhodou nešlo, ešte vždy môžeš na druhý deň zbehnúť na poštu.



p - mat

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat