Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

34. ročník www.pikomat.sk školský rok 2016/2017

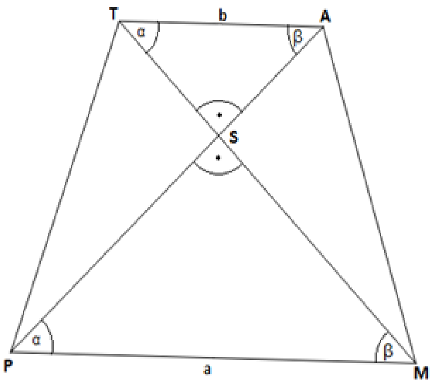
Vzorové riešenia 3. série zimnej časti, kategória 8–9

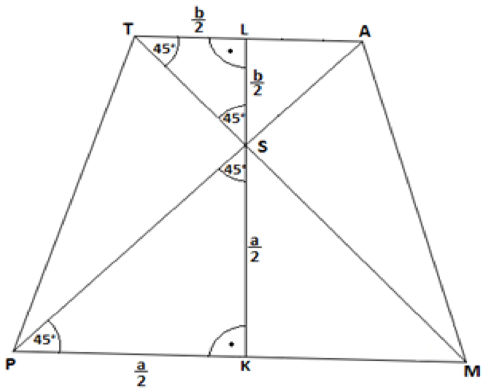
Úloha S1: Euklidova úloha – *Opravoval Jakub „Kubo“ Poljovka*

Ešte pred odchodom nakreslil Euklides Demetrovi na pláži do piesku lichobežník *PMAT* (s rovnobežnými základňami *PM* a *AT*) a povedal: „Dám Ti tieto informácie o lichobežníku *PMAT* a ty mi povedz jeho obsah:

- *PA* je kolmé na *MT*,
- uhly *MPA* a *MTA* sú rovnako veľké, teda $|\sphericalangle MPA| = |\sphericalangle MTA|$,
- aritmetický priemer dĺžok základní je 8 cm.“

Aký bol obsah tohto lichobežníka? Poznámka: Obsah lichobežníka so základňami *a*, *b* a výškou *h* je $S = h \times (a + b) / 2$.





Zo zadania vieme, že $|\sphericalangle MPA| = |\sphericalangle MTA| = \alpha$. Môžeme teda povedať, že $|\sphericalangle PMT| = |\sphericalangle PAT| = \beta$ (platí zo súčtu uhlov v trojuholníku).

Všimnime si, že úsečka **PA** pretína rovnobežné úsečky **PM** a **AT**. Uhly **MPA** a **PAT** sú teda striedavé, z čoho vyplýva, že $\alpha = \beta$. Trojuholníky **PSM** a **TSA** sú preto rovnoramenné a ich ramená zvierajú pravý uhol. Z toho si môžeme uhly α a β jednoducho vypočítať: $\alpha = \beta = (180-90)/2 = 45°$.

Vieme, že obsah lichobežníka vypočítame ako: $S = h(a+b)/2$ (a, b sú základne, h je výška lichobežníka). Teda: $S = 8h$ (zo zadania vieme, že $(a+b)/2 = 8$).

Vidíme, že už nám stačí iba zistiť, aká je výška lichobežníka a úloha bude vyriešená. Na obrázku 2 sme si vyznačili výšku trojuholníka **PMS** na základňu **PM** a výšku trojuholníka **TSA** na základňu **TA**. Keďže ide o rovnoramenné trojuholníky, tak tieto výšky sú zároveň ťažnicami a päty kolmíc **K** a **L** sú teda stredmi strán **PM** a **TA**.

Zároveň sú tieto výšky osami uhlov pri vrchole, čiže delia uhly **PSM** a **TSA** na polovicu, čiže na dva 45-stupňové uhly.

Všimnime si trojuholníky **PKS** a **TLS**. Keďže majú dva zhodné 45-stupňové uhly, sú tieto trojuholníky rovnoramenné. V trojuholníku **PKS** teda platí, že |PK|=|KS|= a/2. Rovnako v trojuholníku **TLS** platí, že |TL|=|LS|= b/2.

Výšku lichobežníka **PMAT** teda vyjadríme nasledovne:

$h = |KS| + |LS|$
$h = a/2 + b/2$
$h = (a+b)/2$
$h = 8$ cm

Keďže sa nám podarilo vypočítať výšku, ľahko vypočítame obsah lichobežníka **PMAT**: $S = 8 \times 8 = 64$ cm^2. **Obsah lichobežníka PMAT je 64 cm^2.**

Bodovanie:
dôkaz, že uhol MPA = uhlu MTA = 45° – 1b.; všeobecné určenie výšky lichobežníka – 3b.; výsledok – 1b.

Úloha S2: Ceremónia – *Opravoval Dávid „Puding“ Mišiak*

Vtom zaznelo „Zoradiť, poooozor!“, a tak sa všetci šiesti, tak ako boli, rýchlo postavili vedľa seba a v pozore hľadeli na ceremoniára. Ten ďalej zavelil „Otočka!“, a tak sa všetci otočili o 90 stupňov, takže teraz stáli v zástupe. Niektorí sa však otočili doľava, niektorí doprava...
Demetros si všimol, že teraz stáli v zástupe tak, že *každá* tenistka mala svojho partnera niekde *pred sebou*. **Koľko rôznych zástupov spĺňa túto podmienku?** Poznámka: Zástupy považujeme za rôzne, keď je niekto na inom mieste alebo inak otočený. Napríklad zástup tenistka, tenistka, tenistka, tenista, tenista, tenista, kde sa všetci pozerajú z pohľadu ceremoniára doprava a rovnaký zástup, kde sa posledný tenista pozerá z pohľadu ceremoniára doľava, sú rôzne!

Predstavme si, že sú ľudia zoradení do zástupu. Majú pritom určité poradie a každý z nich je nejak otočený. Zo zadania vieme, že každý tenista bol *pred* svojou tenistkou, čo neznamená nič iné, než to, že **každá tenistka bola otočená k svojmu partnerovi**. Takže tenistky nemohli byť pootáčané ľubovoľne, ich otočenia boli presne dané polohou ich partnerov v zástupe. Naopak, **tenisti mohli byť otočení akokoľvek** - na ich otočenie nekladie zadanie žiadne požiadavky. Zistíme teda počet všetkých poradí, v ktorých mohli ľudia stáť a potom sa pozrieme, ako sa toto číslo zmení, keď vezmeme do úvahy tieto otočenia.

Pozrime sa teda na poradia, v ktorých mohlo stáť našich 6 tenistov a tenistiek. Na prvé miesto môžeme postaviť jedného zo šiestich ľudí, ktorých máme k dispozícii – to je šesť možností. Na druhom mieste potom musí byť jeden zo zvyšných piatich, takže na prvých dvoch miestach môže byť $6 \cdot 5 = 30$ rôznych dvojíc. Na tretie miesto pôjde niektorý zo zostávajúcich štyroch ľudí (takže prvú trojicu vieme vytvoriť $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$-imi spôsobmi) a tak ďalej, až na posledné miesto nevyhnutne musíme uložiť posledného, ktorý zostal. Dostávame preto 6·5·4·3·2·1 = **720 možných spôsobov, ako usporiadať našich šesť tenistov a tenistiek do zástupu**.

Už sme zisitili, že pri každom z týchto poradí je už presne dané, ako museli byť otočené tenistky, aby mali svojich partnerov pred sebou. Každý z tenistov však mohol byť otočený doľava alebo doprava. Prvý tenista teda mohol byť ľubovoľne otočený – to sú 2 možnosti. Druhý mal na výber taktiež 2 spôsoby otočenia a to isté aj tretí, dostávame teda 2·2·2 = **8 spôsobov, ako mohli byť pootáčaní tenisti**.

Takže vieme, že tenistov a tenistky môžeme usporiadať za seba do zástupu 720-imi spôsobmi, kde pri každom z nich je presne 8 možností, ako mohli byť otočení tenisti (každý do ľubovoľnej z dvoch strán) a pri každej z nich už je otočenie tenistiek dané (polohou jej tenistu v zástupe). To nám dokopy dáva 720·8 = **5 760 možností**, ako mohol vyzerať zástup.

Bodovanie:

Zistenie počtu poradí - 2b; (iba určenie schém typu MMMŽŽŽ, ale bez prehadzovania tenistov (tenistiek) medzi sebou - 1b); Fakt, že pri každom poradí môžu byť tenistky otočené iba jedným spôsobom - 1b; (za jeho tiché použitie bez uvedenia - 0,5b); Možnosť ľubovoľného otočenia každého tenistu dvomi smermi - 1b; výsledok - 1b.

Úloha S3: Lukostreľba – *Opravoval Juraj „Juro" Pavlovič*

Terč pozostával z 8 menších terčíkov ležiacich na kružnici. Na začiatku mal každý terčík jednu z dvoch farieb – červenú alebo zelenú. Prestrelenie šípu cez červený terčík nič nerobilo. Prestrelenie šípu cez zelený terčík spôsobilo, že tento terčík spadol a jeho dva susedné terčíky zmenili farbu: červený sa zmenil na zelený, a naopak. Ak bol niektorý zo susedných terčíkov už spadnutý, ostal spadnutý. Spadnutý terčík už nič nerobil. Terč bol porazený až vtedy, keď boli popadané všetky terčíky. **Dal sa terč poraziť, ak na začiatku boli a) 1 terčík, b) 2 terčíky, c) 7 terčíkov, d) 8 terčíkov zelených? Ak sa daný terč poraziť nedal, nezabudni zdôvodniť prečo. Ak sa poraziť dal, nezabudni sa zamyslieť nad všetkými prípadmi.**

Ak sa snažíme dokázať, že nejaký terč sa *dá* poraziť, stačí len uviesť akúkoľvek jednu konkrétnu postupnosť striel, ktorá ho porazí. To úplne stačí na to, aby sme mohli prehlásiť, že daný terč sa ***dá* poraziť**. Veď to dáva zmysel: ak existuje postupnosť striel, ktorá ho porazí, tak je jasné, že sa dá poraziť.

Zato ak chceme tvrdiť, že nejaký terč sa poraziť *nedá*, už to nie je len tak. Tu totiž musíme nejako ukázať, že neexistuje vôbec žiaden (ani jeden jediný!) postup strieľania, ktorý by terč porazil. Tu už nestačí uviesť jeden (alebo zopár) konkrétny neúspešný postup strieľania, ale treba nejako odôvodniť, prečo naozaj nikdy *žiadne* strieľanie terč nemôže poraziť.

Možnosť d) bola v tomto ohľade pravdepodobne najjednoduchšia. Pri 8 zelených terčíkoch stačí najprv zostreliť 4 terčíky tak, že triafame zaradom vždy každý druhý. Potom zvyšné 4 ostanú zelené a žiaden so žiadnym nesusedí – už len postupne pozostreľujeme aj tie.

Pri možnosti b) bolo treba aj rozlíšiť, ako sú 2 zelené terčíky voči sebe usporiadané: buď sú vedľa seba, alebo je medzi nimi 1, 2 alebo 3 červené terčíky (ostatné možnosti by sa už opakovali). Ak si terčíky očíslujeme dookola od 1 po 8, môžeme možnosti a ich následné zostreľovanie zapísať nasledovne. Zelené terčíky sú 1 a 2: zostreľujeme 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1. Zelené terčíky sú 1 a 3: zostreľujeme 3, 4, 5, 6, 7, 8, 2, 1. Zelené terčíky sú 1 a 4: zostreľujeme 4, 5, 6, 7, 8, 3, 2, 1. Zelené terčíky sú 1 a 5: zostreľujeme 5, 6, 7, 8, 4, 3, 2, 1.

Týmto pádom sme ukázali, že možnosti b) a d) sa skutočne *dajú poraziť*. Pozrime sa na možnosť a). Máme iba jeden zelený terčík, takže môžeme zostreliť najprv jedine ten. Ostane nám „had“, ktorý má na oboch koncoch zelené terčíky a medzi nimi 5 červených. Keďže je takýto symetrický, je úplne jedno, z ktorého konca mu zostrelíme zelený terč. Inú možnosť nemáme. Dostávame „hada“ opäť so zelenými koncami a medzi nimi 4 červenými terčíkmi. Takže jediná zmena nastala, že „had“ sa skrátil akoby o jeden červený terčík. Opäť nemáme inú možnosť, iba takto pokračovať (v každom kroku je jedno, z ktorého konca odstrelíme zelený terčík) a had sa bude ďalej skracovať, až z neho ostanú len dva susediace zelené terčíky. A tu už je jasný problém: ktorýkovek z nich zostrelíme, ten druhý sa premení na červený a ostane tam sám – ten sa nám už nikdy nepodarí zostreliť. Keďže sme celý čas robili kroky, pri ktorých sme nemali na výber (resp. výber z dvoch možností bol úplne rovnocenný) a terč sme neporazili, znamená to, že tento terč sa poraziť *nedá*.

Pri možnosti c) je najpodstatnejšia nasledovná úvaha: Nech prvé zostrelenie spravíme kdekoľvek, určite vznikne aspoň na jednom mieste takáto trojica: ***...?-Z-Č-x***. To znamená *akýkoľvek (?) – Zelený (Z) – Červený (Č) – a diera (x) po zostrelenom terčíku*. Zadanie vraví, že ak chceme poraziť terč, <u>*musíme*</u> *zostreliť všetky terčíky*. Tak si položme otázku: ako zostrelíme tento červený terčík v tejto uvedenej trojici? Prvá vec je jasná: <u>*musíme*</u> *ho premeniť na zelený*. Fajn. Ako ho premeníme na zelený? Opäť jasná odpoveď: <u>*musíme*</u> *vedľa neho zostreliť zelený terčík*. Fajn. Nezabúdajme ale, že vedľa neho je už iba jeden terčík (a ten je zelený). To znamená, že <u>*musíme*</u> *zostreliť tohto zeleného suseda*. A posledná dôležitá otázka: už síce vieme, že ho <u>*musíme*</u> zostreliť, ale ešte sa opýtajme... záleží na tom, <u>*kedy*</u> toto zostrelenie spravíme? Ako to ovplyvní ten „otáznikovým“ terčíkom, ktorý kvôli zostreleniu zmení farbu? Nuž ak by bol „?“ zelený, tak by sme ho aj tak nesmeli zostreliť, lebo by nám pokazil nás zelený, ktorý <u>*musíme*</u> zostreliť. Ak by bol „?“ červený, tak sa s ním aj tak nič iné nemôže diať a toto prefarbenie je preň aj tak skôr či neskôr nevyhnutné. A teda keďže nezáleží na tom, kedy to spravíme, ale vieme, že to spraviť <u>*musíme*</u>, tak to spravme hneď!

S touto znalosťou sa nám výrazne zjednodušuje skúmanie všetkých možností, ako by sa takýto terč mohol dať zostreliť. Ponechávam na čitateľovi, aby preskúmal možnosti, keď pri začiatočnom počte 7 zelených a 1 červený terčík: zostrelíme ako prvý terčík hneď vedľa červeného / zostrelíme ako prvý terčík druhý od červeného / zostrelíme ako prvý terčík tretí od červeného / zostrelíme ako prvý terčík presne oproti červenému. A vždy, keď sa vyskytne situácia ***...?-Z-Č-x***, zostreľme daný zelený terčík – lebo aj tak <u>*musíme*</u>. Vo všetkých 4 prípadoch sa dopracujeme k neporazenému terču, na ktorom ostanú 1 alebo 3 červené terčíky, ktoré sa už zjavne nedajú zostreliť. Preto terč so 7 zelenými terčíkmi na začiatku je neporaziteľný.

<u>Bodovanie</u>:

Všetky 4 správne odpovede – 0,5.; dokázanie: a) – 1b.; b) – 1b.; c) – 2b.; d) – 0,5b.

Úloha S4: Tajné heslo – *Opravovala Michaela „Miški“ Zatrochová*

Tajné heslo bol trojciferný kód *ABC*. Vieme, že súčet *ABC* + *ACB* + *BAC* + *BCA* + *CAB* = 2536. **Aký bol kód ABC, teda tajné heslo?**

Vo vzorovom riešení vám predstavím možnosť, ako sa dal uchopiť tento príklad bez veľkých a komplikovaných rovníc. Zadanie znelo: ABC+ACB+BAC+BCA+CAB=2536. Tento súčet môžeme napísať aj nasledovne:

A*100+B*10+C*1 + A*100+C*10+B*1 + B*100+A*10+1*C + B*100+C*10+A*1 + + C*100+A*10+B*1 = 2536.
Ak čísla s jednotlivými písmenkami sčítame, dostaneme: 221*A + 212*B + 122*C = 2536.

Z tohto môžeme povedať, že A-násobok čísla 221 plus B-násobok čísla 212 plus C-násobok čísla 122 nám dá dokopy 2536. Mohli by sme si spraviť tabuľku so všetkými násobkami a potom nájsť správne riešenie, ale zamyslime sa na chvíľku.

Vidíme, že vo všetkých možných kombináciách písmen A, B, C nám chýba v danom súčte ešte jedna – CBA. Ak by sme ju pripočítali v súčte, a teda aj výsledok by bol o číslo CBA vyšší, v skutočnosti by nám to uľahčilo prácu. CBA = C*100 + B*10 + A*1 a po pripočítaní k zadaniu to vyzerá takto:

222*A+222*B+222*C = 2536 +CBA a po úprave
222* (A+B+C) = 2536 +CBA.

Môžeme teda povedať, že 2536+CBA je násobok čísla 222. Výsledný kód teda môžeme nájsť nasledovne: Napíšeme si násobky čísla 222, ktoré sú väčšie ako 2536. Sú to: 2664, 2886, 3108 atď. Teraz si postupne od každého násobku odrátame 2536 a ich rozdiel je číslo CBA. Aby sme však overili správnosť, tak si musíme čísla dosadiť aj do súčtu na pravej strane rovnice uvedenej vyššie.

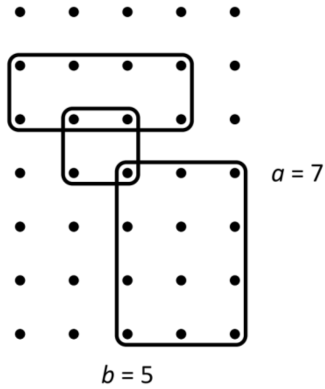
2664-2536 = 128 a ešte overíme
222* (1+2+8) = 2442, takže táto možnosť nie je správna, lebo by nám mal vyjsť výsledok 2664.
2886-2536 = 350 a ešte overíme
222*(3+5+0) = 1776, takže ani táto možnosť to nie je.
3108-2536 = 572 a ešte overíme
222*(5+7+2) = 3108, čo je správne, takže C=5, B=7, A=2. Môžeme si to ešte doplniť aj do súčtu zo zadania ak by sme tomu ešte stále neverili. Z toho vyplýva, že tajný kód je 275.

Bodovanie: správne napísaný postup – 2b, odôvodnenie – 2b, výsledok – 1b.

Úloha S5: Ihrisko – *Opravoval Peter „Bubu“ Onduš*

„Do ihriska v tvare obdĺžnika s rozmermi (a – 1) × (b – 1) chceme natĺcť stĺpiky, ktoré budú tvoriť pravidelnú štvorčekovú mriežku $a \times b$ stĺpikov (napríklad na obrázku je a = 7 a b = 5).
Potom by sme chceli povrazom spojiť vždy štyri stĺpiky tak, aby vytvorili obdĺžnik alebo štvorec so stranami rovnobežnými s okrajmi ihriska. Tieto povrazom ohraničené plochy budú bránky (na obrázku sú príklady troch bránok). Veľkosť bránky musí byť aspoň 1 × 1. Nevieme sa však rozhodnúť, kde ich vytvoriť. Chcel som si teda nakresliť všetky možnosti, kde by mohla byť jedna bránka na ihrisku, ale musí ich byť asi riadne veľa, keďže mi

nestačila ani najväčšia hlinená doštička.“ **Koľko je možností, ako nakresliť jednu bránku na ihrisku? A koľko *rôznych* obvodov môžu mať bránky? Príď na všeobecné riešenie.**



Každú bránku (čiže obdĺžnik) vieme presne určiť podľa dvoch protiľahlých rohov. Každý z týchto rohov musí byť v inom stĺpci aj v inom riadku, aby platilo, že veľkosť bránky je aspoň 1x1. Tieto body môžme okrem tejto podmienky uložiť hocikam.

Počet možností na zvolenie nejakej konkrétnej bránky bude počet možností na zvolenie prvého bodu (a*b) krát počet možností na zvolenie druhého bodu ((a-1)*(b-1)), teda (a*b)*((a-1)*(b-1)). Všimnime si ale, že každú možnosť počítame dvakrát: raz keď berieme prvý ľavý horný roh, a raz keď berieme prvý pravý dolný roh.

Ďalej si môžeme všimnúť, že každú bránku môžeme určiť podľa pravého dolného a ľavého horného rohu ale aj podľa ľavého dolného a pravého horného rohu, teda sme každú bránku rátali dvakrát, čo znamená, že znova treba znížiť počet možností o polovicu. Počet možností na vytvorenie bránky potom bude a*b*(a-1)*(b-1)/4.

Teraz prejdime k obvodu. Najmenšia možná bránka je 1x1, teda najmenší možný obvod bude 4. Najväčšia bránka môže byť veľká ako celé pole preto najväčší možný obvod je 2(a-1+b-1).

Obvod bránky bude vždy párne číslo, pretože sa rovná 2x+2y=2(x+y), čo je určite párne. Presnejšie to môže byť hocaké párne číslo, ktoré je väčšie rovné minimálnemu obvodu, a menšie rovné maximálnemu obvodu, keďže vieme postupne zväčšovať najprv jednu jeho stranu, vždy o 1, až kým nepôjde viac zväčšiť, a potom aj tú druhú stranu, a takýmto spôsobom budeme mať všetky obvody od 4 po 2(a+b-2).

Počet všetkých čísel medzi maximálnym a minimálnym obvodom (nerátajúc minimálny obvod) bude ich rozdiel, čiže 2(a-1+b-1)-4=2(a+b-4). Keďže len každé druhé číslo je párne, tak počet možných obvodov medzi nimi bude a+b-4. Nakoniec ešte treba pripočítať tú 4, ktorú sme predtým nezapočítali. To znamená, že máme a+b-3 možností na obvod bránky.

Bodovanie:

0.5b za prvý výsledok v tvare *ab(a-1)(b-1)/4*; **0.5b** za druhý výsledok; **1.5b** za vysvetlenie a dôkaz všeobecného vzorca pre obvod; **2.5b** za vysvetlenie a dôkaz všeobecného vzorca pre počet možností na vytvorenie bránky