Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

34. ročník www.pikomat.sk školský rok 2016/2017

Vzorové riešenia 2. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Heslo – *Opravovala Monika Machalová*

Nové heslo musí mať presne 10 znakov, ktorými môžu byť malé a veľké písmená anglickej abecedy, číslice a 18 špeciálnych znakov:

/ ! $ ^ @ & * # > < [ ] ( ) % . , ~

Petra to hnevá, lebo také hlúpe heslo si nebude vedieť zapamätať. Svoje doterajšie heslo si pamätal dobre – bolo to 5 náhodných slovenských slov, všetky napísané len malými písmenami (v rámci úlohy uvažuj, že slovenčina má 20000 rôznych slov). **Ktoré heslo je bezpečnejšie, ak by v oboch prípadoch hacker poznal systém, ktorým bolo heslo vytvorené?** Systém na vytvorenie hesla považujeme za bezpečnejší, ak sa ním dá vytvoriť viac rôznych hesiel.

Táto úloha je vo svojej podstate veľmi jednoduchá. Stačí nám zrátať, či je viac možných 10-znakových hesiel z 80 znakov (26 malých, 26 veľkých písmen, 10 cifier a 18 iných znakov), teda $80^{10} \doteq 1{,}07 \cdot 10^{19}$, alebo 5-slovných z 20000 možných slov, teda $20000^5 = 3{,}2 \cdot 10^{21}$. **Na prvý pohľad vidno, že tých druhých (teda možných hesiel podľa pôvodného Peťovho systému) je asi 300-krát viac.**

Pozrime sa na to kúsok bližšie. Oba systémy na tvorbu hesla majú dve vlastnosti – počet objektov (znakov alebo slov) v hesle – označme K, a početnosť množiny, z ktorej tie objekty vyberáme, označme N. Na prvom mieste môže byť ktorýkoľvek z N objektov. Na druhom takisto ktorýkoľvek z N objektov. Takže dvojobjektových hesiel je $N \cdot N = N^2$. Na treťom mieste môže byť tiež ktorýkoľvek z N objektov, takže hesiel môže byť N^3... Atď. až po N^K.

Tu sme si mohli zjednodušiť počítanie a povedať si, že v novom systéme – 10 znakov z 80, to je ako 5 dvojznakov – teda napríklad heslo Aj3DQ!zF7$ si môžme predstaviť ako Aj 3D Q! zF 7$. Kombinácií dvoch znakov je $80 \cdot 80 = 6400$, čo je menej ako 20000, takže hesiel z piatich dvojznakov bude určite menej ako hesiel z piatich slovenských slov (keďže pri každom dvojznaku mám menej možností ako na slová).

Môžme si ešte pozrieť, čo sa deje s počtami možných hesiel, keď N alebo K zvyšujeme.

Predstavme si, že máme heslo zložené z 10 malých písmen. To je $26^{10} \doteq 1{,}4 \cdot 10^{14}$ možností. Keď by som pridal do možných znakov aj veľké písmená, na každé miesto by som mal dvakrát toľko znakov. Teda vyzeralo by to asi tak, že $(2 \cdot 26) \cdot (2 \cdot 26) \cdot (2 \cdot 26) \cdot (2 \cdot 26) \cdot ... = 2^{10} \cdot 26^{10}$, to je 1024-krát viac ako to predošlé. Keď by som namiesto toho ale predĺžil heslo o 2 znaky, získal by som $26^{12} = 26^{10} \cdot 26 \cdot 26$, čo je 676-krát viac ako pôvodné heslo, a pridaním ešte jedného znaku by to už bolo $26^{13} = 26^{10} \cdot 26^{3}$, čo už je 17576-krát viac ako pôvodné heslo. Teda predĺžiť heslo o zopár znakov môže byť efektívnejšie, ako zdvojnásobovať počet povolených znakov. Aj keby som mal vylepšiť heslo z 5 slov, radšej by som pridal šieste náhodné slovo, ako by som zdvojnásoboval počet možných slov (napr. pridaním angličtiny).

Ale najmä, nikdy svoje heslo nikomu neprezraďte. A nepoužívajte to rovnaké heslo na rôznych webstránkach – keď unikne databáza hesiel z jednej, môžu vám hackúť účty aj na ďalších.

Úloha S2: SMS – *Opravovali Sára Kuťková a Michaela Zatrochová*

Pre aké najmenšie prirodzené číslo *x* platí, že ciferný súčet čísla *x* aj ciferný súčet čísla *x* + 1 je deliteľný 5?

Najprv sa zamyslíme, ako sa zmení ciferný súčet čísla *x*, keď k nemu pripočítame číslo 1.

Ak má *x* na mieste jednotiek číslicu 0–8, tak sa ovplyvní iba táto hodnota, a to práve o +1. To znamená, že ciferný súčet čísla *x*+1 bude o 1 väčší ako ciferný súčet čísla *x*. Tým pádom nie je možné, aby boli oba tieto ciferné súčty deliteľné 5, pretože žiadne 2 po sebe idúce čísla nemôžu byť deliteľné 5.

Ak má *x* na mieste jednotiek číslicu 9, tak pripočítanie +1 výraznejšie ovplyvní celé číslo. Môžeme si všimnúť, že ak je 9 na mieste jednotiek, no nie na mieste desiatok, tak sa ciferný súčet čísla zmení o 8, pretože na mieste jednotiek sa z 9 stane 0 a na mieste desiatok sa cifra o 1 zväčší. My však chceme dosiahnuť, aby bola zmena medzi cifernými súčtami čísel *x* a *x*+1 deliteľná 5, pretože potom budú môcť byť oba ciferné súčty deliteľné 5 naraz. Ak sú posledné 2 cifry čísla *x* rovné 9, po pripočítaní 1 sa ciferný súčet zmení o 2·9 – 1 = 17, ak sú to posledné 3 cifry, tak o 3·9 – 1 = 26, pri posledných 4 cifrách sa ciferný súčet zmení o 4·9 – 1 = 35. Teda vieme, že ak chceme nájsť riešenie, tak naše číslo je minimálne 5-ciferné a končí na 9999.

Na miesto desaťtisícok chceme dosadiť čo najmenšiu cifru tak, aby ciferný súčet bol deliteľný 5, čo v tomto prípade bude 49999. Skúška: 4+9+9+9+9 = 40; 5+0+0+0+0 = 5; ciferný súčet oboch čísel je deliteľný 5. Najmenšie prirodzené číslo *x*, ktoré spĺňa všetky podmienky, je **49 999**.

Bodovanie:
správny výsledok – 1b.; ukazánie, že číslo *x* musí končiť cifrou 9 – 2b.; ukázanie, že ide o najmenšie číslo, ktoré spĺňa všetky podmienky – 2b.

Úloha S3: Kôpky – *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula*

„Máme 3 kôpky, na ktorrrých je postupne 49, 51 a 5 kamienkov. V jednom krrroku môžme sprrraviť jednu z dvoch operrrácií:

- dve kôpky spojíme alebo
- kôpku s párrrnym počtom kameňov rrrozdelíme na dve kôpky veľkosti prrresne polovice tejto kôpky.

Môžeme niekedy dostať kôpku, na ktorrej je iba 1 kamienok?“ Nezabudni svoje tvrdenie aj zdôvodniť.

Keďže máme len kôpky s nepárnym počtom kameňov, v prvom kroku delenie akejkoľvek kôpky na dve nie je možné. Spojíme teda prvé dve kôpky, s 51 a 49 kamienkami, pričom nám ostane 5. Vznikla nám kôpka so 100 kamienkami, čo je $2\cdot2\cdot5\cdot5$. Vidíme teda, že obe kôpky (100 aj 5) sú deliteľné piatimi. Akékoľvek číslo deliteľné piatimi vieme všeobecne zapísať ako $5\cdot k$ (kde k je celé číslo). Keďže s týmito kôpkami môžeme podľa zadania robiť len dve operácie, tak sa pozrime, čo sa s nimi stane:

- ak by sme chceli rozdeliť takúto kôpku, tak by číslo k muselo byť párne (pretože 5 nevieme deliť číslom 2 bezo zvyšku) a vznikli by nám dve nové kôpky s počtom kamienkov $5\cdot(k/2)$
- pri zlučovaní kôpok chceme spočítať dve kôpky, povedzme $5\cdot x$ a $5\cdot y$ *(pričom aj x aj y sú celé čísla)*, čo nám vo výsledku vytvorí jednu kôpku s $5\cdot(x+y)$ kamienkami

Vidíme teda, že ak máme na začiatku obe čísla deliteľné piatimi, tak ľubovoľné číslo, ktoré vznikne, bude opäť deliteľné piatimi. Nech budeme teda akokoľvek spájať a rozkladať čísla vzniknuté sčítaním 49 a 51, výsledok bude deliteľný 5. Vzhľadom na to, že my sa snažíme dostať kôpku len s jedným kamienkom, tak sa nám to v tomto prípade nemôže podariť, pretože číslo 1 nie je deliteľné číslom 5 bezo zvyšku.

Teraz skúsime spojiť iné dve kôpky, a to 49 a 5. Vidíme, že obe kôpky, ktoré momentálne máme (54 aj 51) sú deliteľné číslom 3. Môžeme teda zopakovať predošlý postup, len s tým rozdielom, že teraz budú všetky čísla deliteľné tromi. Jednotka nie je deliteľná ani číslom 3, preto sa nám nepodarí vytvoriť kôpku s jedným kamienkom ani v tomto prípade.

Posledné, čo zostáva, je na začiatku spojiť kôpky s 51 a 5 kamienkami. Tentokrát sú obe kôpky (49 a 56) deliteľné číslom 7. Teraz už len použijeme rovnaký postup ako v predchádzajúcich prípadoch a prídeme k tomu, že jednotka sa nedá vydeliť ani číslom 7. Preto ani v tomto prípade nevytvoríme kôpku iba s jedným kamienkom.

V nijakej z možností teda nemôžeme dostať kôpku pozostávajúcu z jedného kamienka. Tým sme dokázali, že sa to z tých troch kôpok, ktoré sme mali na začiatku, nedá vôbec.

Bodovanie:

zistenie, že sa nedá vytvoriť kôpka s 1 kamienkom – 0,5b.; poukázanie na deliteľnosť po spojení kôpok prvotných aj následne odvodených – 1,5b.; dokázanie, že sa nedá vytvoriť iná kôpka ako $3k$, $5k$, $7k$ – 3b *(prípadné chyby pri dokazovaní a vysvetľovaní sú spomenuté priamo v riešení)*.

Úloha S4: Veveričky – *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková*

„V rade vedľa seba je 6 stromov. Na každom z nich žije jedna veverička. Dnes našli tieto veveričky spolu 6 orechov a každá si orechy, ktoré našla, doniesla na svoj strom. Ale keďže nie všetky mali rovnaké šťastie, rozhodli sa, že si ich rozdelia rovnomerne (teda každá bude mať jeden orech). Veveričky dokážu preskočiť len na susedný strom a najviac s jedným orechom v ústach. **Koľko najmenej preskokov zo stromu na strom musia veveričky dokopy urobiť, aby bola na konci každá na svojom strome s jedným orechom, nech už na začiatku mali orechy rozdelené akokoľvek? Čo ak by stromy neboli v rade za sebou na úsečke, ale na kružnici?**"

Chceme zistiť, koľko preskokov musia veveričky urobiť, aby **určite** každá mala u seba jeden orech, nech už boli na začiatku orechy rozdelené akokoľvek. Potrebujeme teda nájsť počet preskokov, ktorý nám bude stačiť v každej situácii (aj tej najhoršej).

Na začiatku máme nejaké rozdelenie. Na niektorých stromoch sú orechy a na niektorých nie. Na stromoch, ktoré majú orech, jeden orech necháme (inak by sme ich zbytočne presúvali) a tie prebytočné orechy priradíme stromom, kde orechy chýbajú. Takto každému stromu pridelíme vzdialenosť, v akej sa nachádza orech, ktorý naň chceme dopraviť. Ak už na tomto strome je orech, táto vzdialenosť je 0, ak sa jeho orech nachádza na susednom strome, vzdialenosť je 1, atď.

Všimnime si, že počet potrebných preskokov na prenesenie orecha je vždy dvojnásobok vzdialenosti, o ktorú sme ho preniesli. Je jedno, ktorá veverička s orechom skáče, či tá z prvého stromu ho zanesie a vráti sa, alebo tá z chýbajúceho stromu si preň príde, alebo si ho odovzdávajú veveričky po ceste… Za každý jeden presun orecha si poň veverička buď musí prísť, alebo sa potom musí vrátiť. Zaujíma nás teda najväčší súčet vzdialeností, ktoré sme priradili jednotlivým stromom.

Ak sú stromy v rade... Zoberme si 1. a 6. strom. Ukážeme, že súčet ich vzdialeností je najviac 5. Ak sa orechy, ktoré chceme na tieto dva stromy dopraviť, nachádzajú na jednom strome (napr. na 2.), tak vzdialenosti, o ktoré ich chceme preniesť, sa presne dopĺňajú do 5 (vzdialenosť medzi 1. a 2. stromom + vzdialenosť medzi 2. a 6. stromom je rovnaká ako vzdialenosť medzi 1. a 6. stromom, čo je 5). Ak sa orechy nenachádzajú na rovnakom strome, tak sme jeden z nich len priblížili k svojmu cieľovému stromu, a tak tento súčet vzdialeností bude menší ako 5. Aký je súčet vzdialeností pre 2. a 5. strom? Ak sú ich orechy niekde medzi nimi, tak je súčet najviac 3 (vzdialenosť medzi 2. a 5. stromom). Ak sú však orechy na jednom z krajných stromov, tak tieto vzdialenosti sú 1 a 4, teda spolu opäť 5. Rovnako nám to vyjde aj pre 3. a 4. strom.

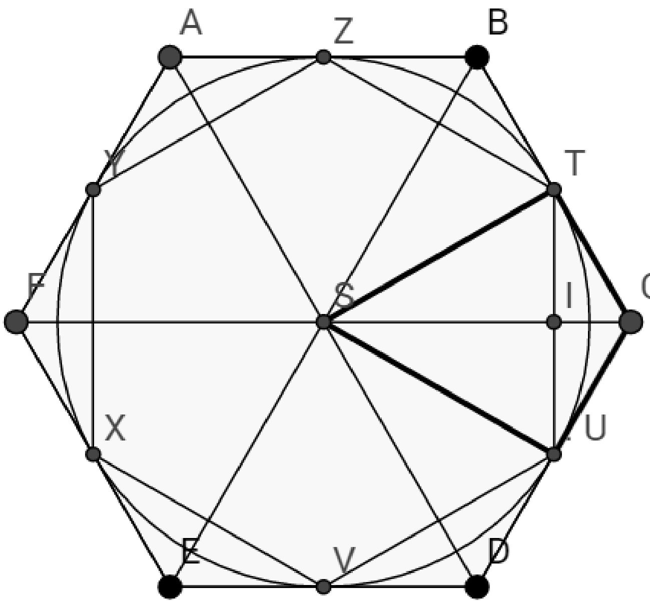
Zistili sme, že pre tri dvojice stromov je súčet ich vzdialeností najviac $3\cdot5=15$. Stačí nám len zistiť, či také rozdelenie orieškov na začiatku naozaj existuje. Stačí dať na začiatok všetkých 6 orechov na 1. alebo 6. strom. Potom vzdialenosti pre jednotlivé stromy sú: 012345, čo je spolu presne 15. Takže potrebujeme najmenej $2\cdot15=30$ preskokov, aby sme s istotou mohli povedať, že každá veverička skončí na svojom strome s orechom.

Ak sú stromy na kružnici... Podobnou úvahou ako v predošlom prípade zistíme, že stromy oproti sebe (teda 1. a 4. strom) majú súčet vzdialeností najviac 3. Toto platí pre každú dvojicu stromov oproti sebe. Súčet vzdialeností je tak najviac $3\cdot3=9$ a vyhovuje tomu situácia, keď je všetkých 6 orechov na jednom strome (vzdialenosti sú 210123). Teraz ten strom môže byť ľubovoľný, lebo v kruhu sú všetky rovnako ďaleko od ostatných. Preskokov nám tak treba $2\cdot9=18$.

Bodovanie:

Úloha bola ťažká, pretože je náročné ukázať veci, ktoré sa zdajú byť na prvý pohľad zjavné. Preto som nebodovala prísne a stačili mi náznaky odôvodnenia jednotlivých tvrdení. Odôvodnenie, že všetky orechy sú u jednej veveričky – 2b.; Odôvodnenie, prečo majú byť všetky na kraji pri stromoch v rade resp. hocikde pri strmoch na kružnici – 1,5b.; správne výsledky pre jednotlivé otázky a rozpísanie, ako mali veveričky skákať – 0,5b. + 0,5b.

Úloha S5: Kaleidoskop – *Opravovali Adam Šánta a Svetlana Sučíková*
Koniec kaleidoskopu bol tvorený kružnicou so stredom *S* a polomerom 12 mm. Tej bol opísaný pravidelný šesťuholník *ABCDEF* a vnútri bol vpísaný pravidelný šesťuholník *TUVXYZ* tak, aby bod *T* ležal na strane *BC*. Oba šesťuholníky mali vrcholy pomenované v smere hodinových ručičiek. V tomto kaleidoskope bolo len jedno farebné sklíčko, a to malo tvar štvoruholníka *TCUS*. **Aký bol obsah farebného sklíčka – štvoruholníka *TCUS*?**



Prvým faktom, ktorý si musíme pri riešení tejto úlohy uvedomiť, je, že **ľubovoľný pravidelný** šesťuholník sa dá rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov (napr. BSC, CSD, DSE, a tak ďalej). O rovnostranných trojuholníkoch platí, že ich vnútorné uhly sú všetky zhodné. Pretože súčet vnútorných uhlov v ľubovoľnom trojuholníku musí byť $180°$, každý uhol v rovnostrannom trojuholníku musí mať veľkosť $180°/3 = 60°$

Zo zadania poznáme polomer kružnice. Keďže táto kružnica je vpísaná 6-uholníku *ABCDEF*, jej prienikom s týmto 6-uholníkom vznikne šesť bodov (*T*, *U*, *V*, *X*, *Y*, *Z*) ležiacich v stredoch strán 6-uhlolníka. Nakoľko tieto body ležia na kružnici, ich vzdialenosť od bodu S bude rovná polomeru, teda 12 mm.

Na ďalší postup a výpočet existuje hneď niekoľko spôsobov. Snáď tým najjednoduchším bolo všimnúť si zhodnosť viacerých trojuholníkov, ako napr. *TCS*, *UCS* a *TBS*. Ich zhodnosť sa dá dokázať napr. pomocou vety SUS. Obsah 4-uholníka *TCUS* bude tým pádom rovnaký ako obsah rovnostranného trojuholníka *SDC* (ako mnohí z Vás uvádzali, *TCS* si vieme *„preklopiť"* do *DUS*).

Na výpočet obsahu trjuholníka *SDC* nám ale ešte chýba výška na niektorú zo strán tohto trojuholníka. Najjednoduchšie bude použiť stranu *DC* a jej výšku *SU*. Túto výšku si dopočítame pomocou Pytagorovej vety, keďže vieme, že $|UC|$ je polovica z $|DC|$.

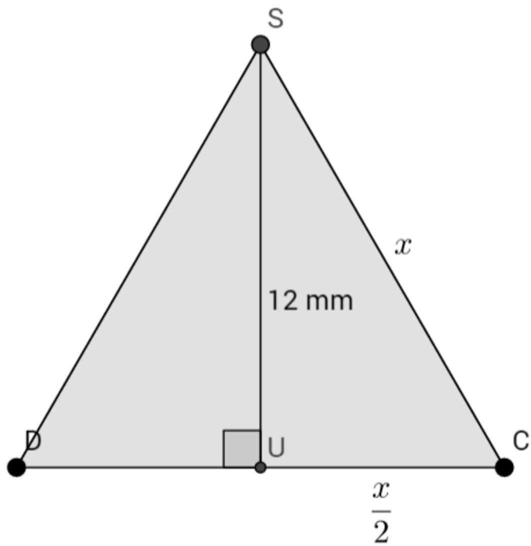
$$|SU|^2 + |UC|^2 = |CS|^2$$

$$12^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2$$

$$\frac{x^2}{4} + 144 = x^2$$

$$\frac{3x^2}{4} = 144$$

$$x = 8\sqrt{3}\,mm$$



Túto výšku už len vynásobíme dĺžkou strany $|SU|$, vydelíme dvomi a dostávame obsah trojuholníka *SDC*.

$$S_{\Delta \mathrm{SDC}} = \frac{|UC| \cdot |SU|}{2} = \frac{8\sqrt{3} \cdot 12\,mm}{2} = 48\sqrt{3}\,mm^2 = 83,1384\,mm^2$$

Bodovanie:

myšlienka a dokázanie, že 6-uholník pozostáva zo 6 rovnostranných 3-uholníkov – 1b.; správne použitie Pytagorovej vety – 1,5b.; ďalší postup a dopočítanie všetkých potrebných údajov k určeniu plochy TCUS – 1,5b.; správny výsledok – 1b.; za nejasne vysvetlené alebo nedokázané tvrdenia sme strhávali po 0,5b. až 1b.