Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

34. ročník www.pikomat.sk školský rok 2016/2017

Vzorové riešenia 3. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Zamestnanci zoo – *Opravoval Matěj Žídek*

Dvaja zamestnanci zoo, Viktor a Filip, pracujú ako kŕmiči tvorov v morskom pavilóne. Ich úlohou je rozvážať vedrá s krmivom k jednotlivým akváriám. Pretože vedrá s krmivom sú ťažké, používajú na ich rozvoz dva fúriky: zelený a modrý. Zelený fúrik je väčší a uvezie viacej vedier ako modrý fúrik. Naložiť a vyložiť oba fúriky trvá rovnako dlho. Prvý deň používal Viktor zelený fúrik a Filip používal modrý. Na konci dňa zistili, že obaja navozili rovnaký počet vedier. Druhý deň používal zelený fúrik Filip a na konci dňa zistili, že tentoraz navozil Filip dvakrát viac vedier ako Viktor. **Ktorý deň navozili spolu viac vedier ak sa ich rýchlosť práce nezmenila pri výmene fúrikov?**

Najprv si označíme niekoľko užitočných vecí:

F – počet fúrikov, ktoré navozí Filip za jeden deň
V – počet fúrikov, ktoré navozí Viktor za jeden deň
z – objem zeleného fúriku
m – objem modrého fúriku
k_1 – celkové množstvo krmiva navozeného prvý deň
k_2 – celkové množstvo krmiva navozeného druhý deň

Zo zadania vieme, že objem zeleného je väčší než objem modrého fúriku, teda $z > m$. Celkové množstvo krmiva, ktoré niektorý pracovník navozí za deň, sa vypočíta ako počet odvezených fúrikov krát objem tohto fúriku. Teda môžeme povedať, že prvý deň Filip odviezol $(F \cdot m)$, Viktor $(V \cdot z)$ krmiva; druhý deň odviezol Filip $(F \cdot z)$ a Viktor $(V \cdot m)$ krmiva. Dohromady tak odviezli prvý a druhý deň:

$$k_1 = (F \cdot m) + (V \cdot z)$$

$$k_2 = (F \cdot z) + (V \cdot m)$$

My sa snažíme určiť, ktoré z týchto čísel je väčšie. Ďalej ste k tejto úlohe pristupovali viacerými spôsobmi, tu si ukážeme dva a spomenieme aj tretí.

1. Spôsob: Je nutné si uvedomiť, že **Filip odvezie za deň viac fúrikov než Viktor**. To vyplýva z prvého dňa, kedy Filip dokázal s menším (modrým) fúrikom navoziť rovnako veľa krmiva ako Viktor s väčším (zeleným) fúrikom. Teda Filip musel s malým fúrikom ísť viackrát, aby sa vyrovnal Viktorovmu množstvu. Takže vieme, že $z > m$, a tiež, že $F > V$.

Tieto dve informácie vieme zapísať aj nasledovne:

$$F = V + X$$
$$z = m + y$$

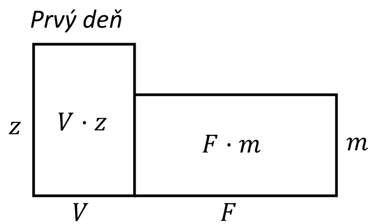
X je <u>kladné číslo</u>, ktoré hovorí, o koľko viac fúrikov zvládne Filip oproti Viktorovi.
y je <u>kladné číslo</u>, ktoré hovorí, o koľko viac krmiva zvládne zelený fúrik oproti modrému.

Keď si toto dosadíme do prvých dvoch rovníc pre k_1 a k_2, vyjde nám:

$$k_1 = (V + X) \cdot m + V \cdot (m + y) = (V \cdot m + X \cdot m) + (V \cdot m + V \cdot y)$$
$$k_1 = 2 \cdot V \cdot m + X \cdot m + V \cdot y$$

$$k_2 = (V + X) \cdot (m + y) + V \cdot m = (V \cdot m + V \cdot y + X \cdot m + X \cdot y) + V \cdot m$$
$$k_2 = 2 \cdot V \cdot m + X \cdot m + V \cdot y + \boldsymbol{X \cdot y}$$

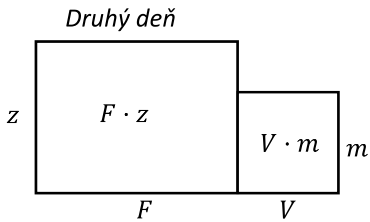
Súčin $(X \cdot y)$ je súčinom dvoch kladných čísel, takže je celý kladný. Z jednoduchého porovnania výsledkov pre k_1 a k_2 už je jasné, že **druhý deň navozili spolu viac krmiva ako prvý deň**. Všimnite si, že pri tomto postupe sme vôbec nepotrebovali informáciu o druhom dni, že Filip navozil 2-krát viac než Viktor – dôležité bolo iba to, že si vymenili fúriky!



Obr. 1

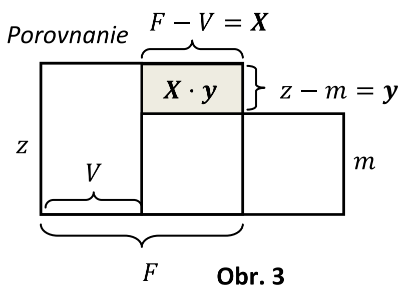
2. Spôsob: Veľmi elegantné riešenie pomocou *geometrického znázornenia*. Súčin dvoch čísel sa dá geometricky znázorniť ako obsah obdĺžnika, ktorého dĺžky strán sú tie dve čísla. Načrtneme si teda k_1 a k_2, každé ako súčet dvoch obdĺžnikov (Obr. 1 a Obr. 2). Keď potom tieto náčrty prekryjeme (Obr. 3), hneď vidíme, že útvar predstavujúci druhý deň pokrýva celý obsah prvého dňa a ešte niečo navyše. Správna mierka pre nás nie je podstatná, dôležité je iba to, že

$F > V;\ z > m.$



Obr. 2

Základná myšlienka je veľmi podobná ako pri 1. spôsobe, no toto vyobrazenie je omnoho názornejšie.



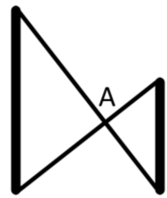
Obr. 3

3. spôsobom bolo prosto riešiť rovnice z prvého a druhého dňa, ktoré nám hovoria, že prvý deň zamestnanci navozili rovnako veľa krmiva, zatiaľ čo druhý deň navozil jeden z nich dvakrát toľko ako druhý. Aj tu by sme sa, pravdaže, dopracovali k rovnakému záveru.

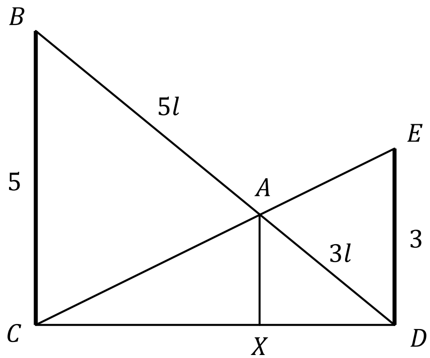
<u>Bodovanie</u>:

správna odpoveď – 0,5b.; akékoľvek správne odôvodnenie – 4,5b.; aj pri neúplnom postupe či nesprávnom výsledku som udeľoval body za čiastočné správne úvahy, napríklad za odôvodnenie, prečo je Filip výkonnejší než Viktor – 1b.

Úloha S2: Preliezačka – *Opravoval Jakub „Kubo“ Poljovka*
Preliezačka pozostávala z dvoch stien a dvoch napnutých lán. Jedna stena bola päť metrov vysoká, druhá tri metre vysoká. Prvé lano spájalo vrch prvej a spodok druhej steny, druhé lano spájalo spodok prvej a vrch druhej steny (viď obrázok). V istom bode A sa tieto laná krížili. **Ako vysoko bol bod A nad zemou?** Poznámka: Riešenie pomocou meraní dĺžok nebude ohodnotené plným počtom bodov – riešenie by predovšetkým malo obsahovať zdôvodnenie.



Označme si vrch vyššej steny B a jej spodok C, spodok nižšej steny D a jej vrch E. Bod X nazveme pätu kolmice z bodu A na úsečku CD (to je bod na zemi priamo pod bodom A). Teda tak, ako je to na obrázku. Zo zadania už vieme, že $|BC| = 5\ m$ a $|ED| = 3\ m$.



Chceme určiť výšku, v akej bol bod A, potrebujeme teda poznať $|AX|$. Všimnime si, že uhly BAC a EAD sú vrcholové a uhly CBD a BDE sú striedavé. Trojuholníky BAC a DAE sú teda podobné podľa vety UU. Keďže pomer zodpovedajúcich si strán $|BC|:|ED| = 5:3$, koeficient podobnosti týchto trojuholníkov je $5/3$.

Pomer strán $|BA|:|AD|$ je teda tiež $5:3$. Predpokladajme, že $|BD| = 8l$, kde l je osmina dĺžky úsečky BD. V tom prípade $|BA| = 5l$ a $|AD| = 3l$, čo vyplýva z pomeru dĺžok týchto dvoch úsečiek.

Trojuholníky DXA a DCB sú tiež podobné podľa vety UU, lebo uhol BDC majú spoločný a uhly AXD a BCD sú pravé (stena je na zem kolmá). Koeficient podobnosti týchto trojuholníkov je $3/8$, lebo $|AD|:|BD| = 3l:8l$. Dĺžku úsečky AX teda vypočítame z pomeru $|AX|:|BC|$ takto: $|AX| = 3/8 \cdot |BC| = 3/8 \cdot 5 = 15/8 = 1{,}875$.

Bod A bol teda vo výške $1{,}875$ metra nad zemou.

Bodovanie:
kompletné riešenie – 5b.; ak bola úloha vyriešená iba pre konkrétnu vzdialenosť stien – 3b.

Úloha S3: Billboard – *Opravoval Juraj „Juro“ Pavlovič*
Na billboarde stálo: Dokážeš hravo vyriešiť tento príklad? **Pre ktoré všetky *n* deliteľné tromi platí, že sa prirodzené čísla od 1 po *n* (vrátane) dajú rozdeliť do troch rovnako veľkých skupín s rovnakým súčtom?** Pokiaľ áno, príď pracovať do našej poisťovne!

Skôr, než sa vrhneme na nejaké všeobecné úvahy, je dobré začať preskúmaním zopár konkrétnych prípadov. Tak poďme rovno na to.

Keby bolo *n* = 3. Rozdeliť čísla 1, 2, 3 do troch skupín tak, aby v každej skupine bol rovnaký súčet, to je zjavný nezmysel. Takže **pre *n* = 3 sa to nedá**.

Keby bolo $n = 6$. Rozdeliť čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 do troch skupín s rovnakým súčtom, to je hračka: 1+6 = 2+5 = 3+4 = 7. Tri skupiny so súčtom 7. Hotovo.

Keby bolo $n = 9$. S číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sa možno bude treba trochu pohrať, ale po chvíli istotne natrafíme napríklad na rozdelenie 1+5+9 = 2+6+7 = 3+4+8 = 15. Súčet 15.

Teraz sa ešte raz bližšie pozrime na prípad s číslami 1 až 6, ktoré sa nám tak ľahko podarilo rozdeliť do 3 skupín s rovnakým súčtom. Čo keď všetky tieto čísla zvýšime napríklad o 1? Nuž namiesto čísel 1 až 6 máme odrazu čísla 2 až 7, avšak stále je to 6 po sebe idúcich čísel a stále sú rozdelené v troch skupinách s rovnakým súčtom (iba teraz 2+7 = 3+6 = 4+5 = 9). To je zaujímavé! Veď vlastne tie čísla môžeme takto zvyšovať donekonečna, a tým pádom vieme dostať ľubovoľných 6 po sebe idúcich čísel rozdelených do 3 skupín s rovnakým súčtom. Inými slovami: **ľubovoľných 6 po sebe idúcich čísel sa dá rozdeliť do 3 skupín s rovnakým súčtom**.

Keby bolo $n = 12, 15, 18, \dots$ Prípad $n = 12$, to je vlastne ako prípad $n = 6$, ku ktorému pridáme ďalších 6 čísel 7, 8, 9, 10, 11, 12. My ale už vieme, že rozdeliť 6 po sebe idúcich čísel do vyhovujúcich skupín je hračka: 7+12 = 8+11 = 9+10 = 19. Tým pádom nám stačí tieto nové skupiny pripojiť k už existujúcim skupinám, ktoré nám vyšli pri $n = 6$, a riešenie pre $n = 12$ je hotové. Všimnime si: **Ak máme vyhovujúce rozdelenie pre nejaké n, tak ľahko vytvoríme vyhovujúce rozdelenie aj pre ($n + 6$).**

Týmto pádom máme vyhraté! Pretože $n = 15$, to je ako (už vyriešený) prípad $n = 9$, iba zvýšený o 6 čísel; prípad $n = 18$, to je ako (už vyriešený) prípad $n = 12$ zvýšený o 6 čísel; $n = 21$ je ako $n = 15 + 6$; a tak ďalej a tak ďalej. Ukázali sme, že takýmto spôsobom vieme pokryť **všetky n deliteľné tromi okrem prvého $n = 3$**.

Bodovanie:

správna odpoveď – 0,5b.; systém, ako spraviť rozdelenia keď n je párne – 1b.; dôkaz, že tento systém funguje – 1b.; systém, ako spraviť rozdelenia keď n je nepárne – 1b.; dôkaz, že tento systém funguje – 1,5b.

Úloha S4: Zberateľ – *Opravovali Daniel „Dano“ Kopf Michaela „Jerry“ Dlugošová*

Jamesov spolucestujúci bol zberateľ prvočísel v tvare $8k + 5$, kde k je nezáporné celé číslo. Nech ale robil, čo robil, nikdy ich nevedel nájsť príliš veľa za sebou. **Pre koľko najviac po sebe idúcich čísel k je $8k + 5$ prvočíslo? Prečo ich nemôže byť viac?**

Na prvý pohľad nám nemusí nič napadnúť, tak sa jednoducho pozrieme na niekoľko čísel v tomto tvare. Keďže k je nezáporné (teda môže byť aj nula), dostávame čísla 5, 13, 21, 29, 37, 45… Je očividné, že keď k zväčšujeme o 1, tak každé ďalšie vzniknuté číslo bude o 8 väčšie ako predchádzajúce.

Všimnime si, že 5 aj 13 sú prvočísla. To máme 2 po sebe idúce prvočísla. Poďme ďalej. 21 nie je prvočíslo. Ideme ďalej. 29 a 37 sú prvočísla, to máme opäť dve po sebe idúce. Skúsme nájsť tri. Ďalšie číslo 45, žiaľ, nie je prvočíslo. Takže máme stále len dve po sebe.

Dvakrát sme mali dve po sebe idúce prvočísla a vždy na ďalšom (treťom) čísle sa nám to pokazilo. Nebude za tým nejaké pravidlo? Preskúmajme to.

Čísla 21 a 45 sú deliteľné tromi, ide teda o zložené čísla (jediné prvočíslo, ktoré „smie“ byť deliteľné tromi, je samotná trojka, ale tá nie je v tvare 8*k*+5). Môžeme si všimnúť, že číslo 21 sme dostali po dosadení *k*=2, číslo 45 sme dostali pri *k*=5. Máme výraz 8*k*+5, takže je jasné, že ak zväčšíme *k* o 3, zväčší sa výsledné číslo o 3·8, teda o 24.

Lenže 24 je deliteľné tromi, a ak k číslu deliteľnému tromi (21) pripočítame číslo deliteľné tromi (24), dostaneme opäť číslo deliteľné tromi. A takto to bude pokračovať. Čiže k 45 pripočítame opäť 24, dostaneme 69 (deliteľné tromi), a tak ďalej.

Z toho vyplýva, že každé tretie číslo v tvare 8*k*+5 bude deliteľné tromi, a tak každé tretie číslo bude zložené. Tým pádom vieme dostať **najviac 2 prvočísla po sebe v tvare 8*k*+5**.

Bodovanie:
správny výsledok – 1b.; deliteľnosť tromi – 1b.; dôkaz, že to naozaj funguje – 3b.

Úloha S5: Prípitok – *Opravoval Samuel „Samko“ Cibulka*

Po tomto zvolaní si všetci navzájom začali štrngať pohármi. Naraz si môžu štrngnúť len dvojice alebo trojice. Pri jednom trojštrngnutí trojice ABC (všetci traja naraz priložia poháre k sebe a spravia jeden štrng) to berieme tak, že si štrngli A s B, B s C aj C s A, ale do počtu štrngnutí sa zarátalo len 1 štrngnutie. **Na koľko najmenej štrngnutí si vedia štrngnúť siedmi ľudia? Na koľko najmenej štrngnutí si vedia štrngnúť šiesti ľudia? Ako si majú štrngnúť?**

Poďme najskôr nájsť odpoveď na prvú otázku – pre 7 ľudí. Pri úlohách takéhoto typu je relatívne jednoduché začať rovno s hľadaním takéhoto riešenia. Je to celkom dobrý začiatok, pretože tak získame lepší prehľad o tom, čo presne chceme ukázať.

Po chvíľke skúšania môžeme zistiť, že 7 ľudí si zvládne štrngnúť na 7 štrngnutí. Ako k niečomu takému dospieť? Začnime s pozorovaním, že dvojštrngnutia používať vôbec nemusíme. Nič tým totiž neušetríme. Ak by sme chceli, aby si osoba *A* štrngla s *B*, tak si rovno môžu trojštrngnúť s *C* a rovnako sa to bude rátať iba ako jedno štrngnutie. Potom je najlepšie nájsť nejaký vlastný systém, ktorým budeme hľadať najlepšiu možnosť. Označme ľudí písmenami *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*. Trojštrngnutie medzi *A*, *B* a *C* označme jednoducho *ABC*.

Budeme sa snažiť, aby si žiadna dvojica neštrngla dvakrát, aby sme trojštrngnutia využívali čo najefektívnejšie. Náš systém bude spočívať v tom, že postupne zabezpečíme, aby si *A* štrngol so všetkými, potom *B* so všetkými zvyšnými, a tak ďalej až po *G*. Začneme s *A*. Urobíme napríklad štrngnutia ***ABC***, ***ADE*** a ***AFG***.

Teraz sa pozrime na *B*. Ten si už štrngol s *A* a *C*, musí si ešte štrngnúť s *D*, *E*, *F* a *G*. Mohli by sme urobiť *BDE*, ale to sa nám neoplatí, lebo *D* a *E* si už štrngli. Urobme preto ***BDF*** a ***BEG***. Pozrime sa na *C*. Ten si taktiež potrebuje ešte štrngnúť s *D*, *E*, *F* a *G*. Znova vyberieme ***CDG*** a ***CEF*** tak, aby si neštrngla dvojica, ktorá si už štrngla predtým. Ľahko overíme, že teraz si už štrngli všetky dvojice.

V tomto momente ešte musíme ukázať, že vždy potrebujeme aspoň 7 štrngnutí. Až vtedy vieme s istotou, že 7 štrngnutí je najmenší počet. To, že sme už našli konkrétny systém, ako si vystačiť so 7 štrngnutiami, je veľmi dobrý začiatok. Avšak takéto hľadanie možností ako dôkaz nestačí. Čo ak sme iba nejakú možnosť prehliadli, ktorá by to bola zvládla na ešte menej štrngnutí? To, že niečo nevieme nájsť, totiž nie je dôkaz toho, že niečo také neexistuje (okrem prípadu, že by sme preskúmali naozaj všetky možnosti, čo by nebolo vôbec také jednoduché). Každopádne už aspoň vieme, čo presne chceme ukázať – že 7 je naozaj najmenší možný počet.

Skúsme to takto. Spočítajme, koľko dvojíc ľudí si vlastne musí štrngnúť. Zoberieme si najskôr jedného, nazvime ho *A*. *A* si musí štrngnúť so všetkými zvyšnými 6 ľuďmi. Teraz si vezmime ďalšieho, nazvime ho *B*. Ten si už štrngol s *A*, takže zostáva už len 5 ľudí, s ktorými si musí štrngnúť. Takýmto spôsobom sa dostaneme k počtu 6+5+4+3+2+1 = 21 dvojíc. Keď sa pozrieme na jedno trojštrngnutie, tak počas neho si štrngnú 3 dvojice naraz. Keď teda chceme, aby si štrnglo všetkých 21 dvojíc, potrebujeme na to aspoň 21 / 3 = 7 trojštrngnutí. To sme presne chceli ukázať!

Môžeme si všimnúť, že na túto úvahu sme na začiatku nepotrebovali skúmať možnosti. No aj keby sme túto úvahu spravili hneď na začiatku, aj tak by sme ešte potrebovali nájsť konkrétny postup, ktorým to ide na 7 štrngnutí. Buď najprv nájdeme postup s nejakým počtom štrngnutí a potom ukážeme, že naozaj potrebujeme aspoň toľko štrngnutí; alebo ukážeme, že potrebujeme aspoň niekoľko štrngnutí a potom nájdeme postup, ktorým to ide na taký počet štrngnutí. Iba vtedy si môžeme byť *naozaj istí*, že sme našli skutočne najmenší počet.

Podobným postupom by sme mohli vyriešiť tento problém aj pre šiestich ľudí. Skúsme teraz začať z opačnej strany. Najprv zistíme, že pri 6 ľuďoch si potrebuje štrngnúť 5+4+3+2+1 = 15 dvojíc. To je aspoň 15 / 3 = 5 trojštrngnutí. Teraz nám stačí nájsť postup, ktorým si aj naozaj štrngnú na 5 štrngnutí. Po chvíli hľadania však zistíme, že to nie je také jednoduché. Máme dve možnosti. Buď ukážeme, že nám 5 štrngnutí nestačí, ale potrebujeme ich aspoň 6, alebo naozaj nájdeme postup na 5 štrngnutí. Vždy stojí za to preskúmať obidve tieto možnosti, lebo inak sa môžeme zaseknúť.

Poďme skúsiť ukázať, že treba aspoň 6 štrngnutí. Pozrime sa na túto situáciu znova z trocha iného pohľadu. V koľkých štrngnutiach musí najmenej byť každý jeden z týchto šiestich ľudí? Musí si štrngnúť so všetkými ľuďmi okrem seba samého, takže s piatimi. Jedným trojštrngnutím si štrngne najviac s dvomi ľuďmi, dvomi trojštrngnutiami so štyrmi. Takže ich potrebuje aspoň 3. Dokopy všetci ľudia potom štrngajú 3·6 = 18-krát. V jednom trojštrngnutí sú naraz traja ľudia, takže potrebujeme aspoň 18 / 3 = 6 štrngnutí. To sme presne chceli ukázať a teraz nám už stačí len nájsť postup na 6 štrngnutí.

Postupovať budeme veľmi podobne ako pri 7 ľuďoch. Teraz sa už však tomu, že si dvakrát štrngne tá istá dvojica, nevyhneme. Dvojíc ľudí je totiž 15 a chceme použiť 18 štrngnutí. Máme ľudí *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. Najprv urobíme ***ABC*** a ***ADE***. Teraz chceme *AF*, urobíme napríklad ***ABF***, pretože B budeme chcieť vyriešiť v ďalšom kroku. Urobme teda ***BDE***. *C* ešte zostávajú *D*, *E* a *F*. Dvojica *D* a *E* si však už štrngla, preto vyberieme ***CEF*** a ***CDF***. Znova si môžeme ľahko overiť, že každý si už štrngol s každým. Mali sme trochu šťastie, že sme hneď na prvýkrát našli riešenie, ale po krátkom skúšaní sa k nejakému riešeniu dalo dopracovať.

Bodovanie:

postup pre 7 ľudí a 7 štrngnutí – 1b.; postup pre 6 ľudí a 6 štrngnutí – 1b.; dôkaz, že 7 ľudí potrebuje aspoň 7 štrngnutí – 1,5b.; dôkaz, že 6 ľudí potrebuje aspoň 6 štrngnutí – 1,5b.