Vzorové riešenia 3. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Nabitý Koberec – *Opravoval Matej Moško*
Elektrinou nabitý koberec mal tvar obdĺžnika, plochu 16 metrov štvorcových a žiadne dva body na ňom neboli od seba ďalej ako 7 metrov. **Aké rôzne obvody môžu mať koberce spĺňajúce tieto podmienky?**

Ideme zistiť, aké rôzne hodnoty môže mať obvod obdĺžnika spĺňajúceho dve podmienky. Žiadne dva body na ňom ležiace nie sú vzdialené viac ako 7 metrov a jeho obsah je vždy 16 m^2.

Ako prvé si treba uvedomiť, že keď hľadáme všetky možné obvody, určite musíme nájsť najmenší možný a najväčší možný obvod. Čakajú nás teda tieto dva problémy.

Predtým než začneme tieto dva problémy riešiť zamyslime sa nad podmienkou, že dva body sú od seba najviac 7 metrov vzdialené. V obdĺžniku sú od seba najviac vzdialené protiľahlé vrcholy, ktoré tvoria uhlopriečku. Teda veľkosť uhlopriečky je $\leq$ 7 metrov. V tom prípade, keď si označíme dve strany obdĺžnika ako a a b, tak potom platí Pytagorova veta, ktorú si napíšeme v tvare nerovnice:

$$a^2 + b^2 \leq 7^2 = 49$$

Obdĺžnik s nejakým zadaným obsahom nadobúda najmenší obvod práve vtedy keď je to štvorec. V našom prípade teda štvorec s plochou 16 m^2 má veľkosť strany 4 metre, a teda obvod 16 metrov. Tu si môžeme hneď všimnúť, že uhlopriečka *u* je kratšia ako 7 metrov lebo jej dĺžka je $\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} < 7$

Už sme teda zistili, akú najmenšiu hodnotu môže mať obvod a to konkrétne 16 metrov. Teraz poďme zistiť najväčšiu hodnotu. Zoberieme si už našu známu nerovnicu s Pytagorovou vetou.

$$a^2 + b^2 \leq 49$$

Ďalej vieme, že obsah je $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = 16$. Spomeňme si na taký pekný a známy vzorček:

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

My teda vieme, že $2 \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = 32$, to keď pripočítame na obe strany našej nerovnice tak nám vznikne: $a^2 + b^2 + 2ab \leq 49 + 2 \cdot 16$ to upravíme na $(a + b)^2 \leq 81$ a teda po odmocnení $(a + b) \leq 9$. Odmocniť môžeme, lebo $(a + b)$ je kladné, ide o veľkosti strán. Všimnime si, že $(a + b)$ je polovica obvodu, a teda celý obvod je ≤ 18 metrov. Získali sme maximálny možný obvod takouto šikovnou matematickou fintou.

Našli sme teda najmenší a najväčší možný obvod. Najmenší obvod je 16 metrov a najväčší 18 metrov. A čo ostatné obvody? Jednu stranu môžem plynule zmenšovať a druhú zväčšovať až kým nedosiahnem najväčší možný obvod, takže viem dosiahnuť každú hodnotu obvodu medzi 16 a 18.

Odpoveď: *Koberce spĺňajúce podmienky môžu mať hodnoty medzi 16 a 18 metrov (vrátane 16 metrov a 18 metrov).*

Bodovanie:
za odôvodnenie, že uhlopriečka je ≤ 7 metrov – 0,5b.; za správne použitie Pytagorovej vety – 0,5b.; za určenie najmenšieho obvodu aj s odôvodnením – 1,5b.; za určenie najväčšieho obvodu aj s odôvodnením – 1,5b.; za kompletný postup – 1b.

Úloha S2: Podivné zariadenie – *Opravovala Svetlana Rampašeková*

V strojovni bolo desať panelov. Prvý spotreboval 1 MJ energie za hodinu, druhý 2 MJ, tretí 3 MJ, ..., až desiaty 10 MJ. Pri testovaní sa postupne zapínala na jednu hodinu vždy jedna kombinácia týchto panelov až dokým neotestovali každú možnú kombináciu práve raz (teda postupne všetky možné kombinácie jedného, dvoch, troch, ..., desiatich zapnutých panelov). **Koľko MJ energie sa pri testovaní minulo?**

Testovali sme všetky možné kombinácie pozapínania panelov. Každý z panelov môže byť buď vypnutý, alebo zapnutý. Pričom každý panel musí byť rovnako veľa krát zapnutý ako vypnutý, lebo za každým zapnutím príde vypnutie. Máme 10 strojov, z ktorých každý môže byť v 2 stavoch (vypnutý/zapnutý). To, koľko je kombinácií stavov pre všetky panely teda vypočítame ako $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^{10} = 1024$ možností. Nás zaujímajú ale iba zapnuté panely, a preto budeme počítať len s polovičnou hodnotou: 1024/2=**512**. Každý panel je totiž zapnutý práve v toľko isto možnostiach, v koľkých je vypnutý.

Teraz máme vyrátané koľkokrát bude každá páčka zapnutá. Stačí nám už iba dopočítať spotrebu všetkých panelov dokopy: 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=**55MJ**.

A keďže všetky panely boli zapnuté rovnako veľa krát, tak vynásobením počtu zapnutí každého panelu spoločnou spotrebou zistíme koľko energie sme spotrebovali pri testovaní: **55·512=28160 MJ.**

Pri testovaní sa spolu minulo 28160 MJ energie.

Bodovanie:
ak ste vypísali všetky kombinácie - 1b.; za určenie koľkokrát zapneme každý panel - 3b.; za vypočítanie spotreby s kompletným odôvodnením - 1b.

Úloha S3: Páčky – *Opravovali Tomáš Ganz a Alex Chudíc*

Páčky boli rozmiestnené do mriežky 10 × 10, pričom boli v ľubovoľnom poradí očíslované číslami 1 až 100. V manuáli sa písalo:

- V každom riadku páčka s najmenším číslom ovláda napájanie stroja.
- V každom stĺpci páčka s najväčším číslom ovláda chladenie stroja.

Mohlo sa stať, že *žiadna* páčka neovládala zároveň napájanie aj chladenie? Mohla tam byť práve jedna páčka ktorá ovládala zároveň napájanie aj chladenie? Mohli tam byť práve dve také páčky? Nezabudni svoje odpovede zdôvodniť!

Pri prvej časti úlohy stačí rozmiestniť čísla od 1 po 10 tak, aby bolo každé z nich v inom riadku a aby neboli všetky spolu v jednom stĺpci. To, že je každé v inom riadku zaručí, že každé z nich ovláda napájanie. Bude to totiž nutne najmenšie číslo daného riadku. To, že nie sú všetky v jednom stĺpci zase zaručí, že žiadne z nich neovláda chladenie, pretože aj keby bolo až deväť z nich v jednom stĺpci, posledná páčka tohto stĺpca bude mať určite väčšie číslo. Ak sa nám toto podarí, ostatné čísla môžeme doplniť ľubovoľne. Stačí teda nájsť spôsob, ako sa to dá, ten je napríklad nasledovný:

1	44	34	80	100	24	45	33	95	16
67	2	13	31	15	30	83	18	38	20
21	69	3	49	25	42	27	94	52	36
14	32	71	4	35	73	97	65	39	28
41	26	93	78	5	46	62	48	19	50
51	29	53	54	55	6	57	58	59	12
61	47	63	64	90	66	7	68	99	70
40	72	92	74	75	76	77	8	79	89
81	82	17	84	85	86	87	88	9	56
91	60	43	11	23	96	37	98	22	10

Pri druhej časti úlohy je to o niečo ľahšie, nakoľko stačí čísla napísať od 1 po 100 do tabuľky postupne a hneď to pekne vidieť. Je to preto, že najväčšie čísla každého stĺpca sú v spodnom riadku a tie vždy ovládajú chladenie. A každý riadok má najmenšie číslo úplne naľavo. Číslo 91 spĺňa obe tieto vlastnosti a je jediné, ktoré bude ovládať aj chladenie, aj napájanie.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Poďme sa pozrieť na tretiu časť úlohy. Páčky, ktoré budú ovládať aj napájanie aj chladenie – označíme si ich *X* a *Y* – nemôžu byť v jednom riadku ani stĺpci, lebo vždy iba jedna páka z riadka alebo stĺpca môže niečo ovládať. Označme si tiež páčku A, ktorá je v rovnakom riadku, ako X a v rovnakom stĺpci, ako Y. Takisto označme páčku B, ktorá je v jednom riadku s Y a v jednom stĺpci s X. Môžeme si to teraz zapísať do tabuľky:

		X				A			
		B				Y			

Vieme, že musí platiť:

1. $X < A$, lebo X musí byť najmenšie v riadku
2. $X > B$, lebo X musí byť najväčšie v stĺpci
3. $Y > A$, lebo Y musí byť najväčšie v stĺpci
4. $Y < B$, lebo Y musí byť najmenšie v riadku

Z prvej a tretej nerovnosti platí $X<A<Y$, teda že $X<Y$. Ale z druhej a štvrtej zase platí $X>B>Y$, teda že $X>Y$. Vidíme, že nemôžu platiť obidve tieto tvrdenia naraz a teda sme našli spor, ktorý dokazuje, že nie je možné, aby boli dve páčky, ktoré ovládajú aj chladenie, aj napájanie.

Bodovanie:
za vysvetlenie, prečo prvá možnosť môže nastať a uvedenie príkladu – 1,5b.; za vysvetlenie, prečo druhá možnosť môže nastať a uvedenie príkladu – 1,5b.; za dokázanie, že tretia možnosť nastať nemôže – 2b.

Úloha S4: Kód – *Opravovali Karolína „Kaja" Pisoňová*
Katarína „Čeky" Marčeková

Kód bolo celé číslo väčšie ako 0 a menšie ako 50. Strážcovia postupne povedali:

1. Kód je jedno z čísel 28, 29, 30, 32, 33, 34.
2. Kód je dvojciferné číslo deliteľné piatimi.
3. Kód je nepárne číslo.
4. Kód obsahuje číslicu 2.
5. Kód je prvočíslo.
6. Kód je druhá mocnina prirodzeného čísla.

Potom sa ozval výkrik: „Traja klamú! Ja..." ktorý však rýchlo niekto udusil. **Aký je teda kód? A ktorí traja strážcovia klamali?**

Keď sa pozrieme na tvrdenia jednotlivých strážcov, môžeme si všimnúť, že niektoré dvojice v žiadnom prípade nemôžu platiť naraz, čiže ak platí jedno z nich, druhé platiť nemôže (ale môžu byť aj obe nepravdivé). Sú to tvrdenia:

1. a 6. – pretože medzi číslami vymenovanými v 1. tvrdení nie je žiadna druhá mocnina prirodzeného čísla
2. a 5. – jediné číslo, ktoré je deliteľné 5 a je zároveň prvočíslo je samotná 5, lenže druhý strážca hovorí o dvojciferných násobkoch čísla 5
5. a 6. – číslo, ktoré je druhou mocninou nemôže byť prvočíslo, pretože je deliteľné okrem čísla 1 a samého seba ešte aj svojou odmocninou.

Predpokladajme, že 1. strážca hovorí pravdu. Vieme teda, že 6. strážca klame a potrebujeme ešte dvoch strážcov, ktorí budú klamať. Čísel, ktoré môžu byť kódom ak 1. strážca hovorí pravdu nie je veľa, tak sa na každé z nich poďme pozrieť a určiť, ktorí strážcovia pri ňom klamú. Pri čísle 28 klamú 2., 3., 5. a 6., pri 29 klame len 2. a 6., pri 30 sú to 3., 4., 5. a 6., pri 32 zase 2., 3., 5. a 6., pri čísle 33 klamú 2., 4., 5. a 6. a pri 34. klamú všetci okrem prvého. Z toho je jasné, že 1. strážca musí klamať, pretože pri žiadnom čísle, pri ktorom on hovorí pravdu, neklamú práve traja.

Ak by hovoril pravdu 6. strážca, tak kód musí byť jedno z čísel 1, 4, 9, 16, 25, 36 a 49. Z našich úvah na začiatku vieme, že 1. a 5. strážca budú klamať, teda zo strážcov 2., 3., a 4. môže klamať už len jeden. Poďme zase overiť všetky čísla, ktoré spomína 6. strážca. Pri čísle 1 klamú 2. a 4., pri čísle 4 klamú 2., 3. a 4., pri 9 zase 2. a 4., pri 16 klamú 2., 3. a 4., pri 25 neklame nikto iný, pri 36 klamú 2., 3. aj 4., a pri čísle 49 klamú 2. a 4. Keďže pri žiadnom z týchto čísel neklame okrem 1. a 5. nikdy práve jeden ďalší, tak 6. strážca musel tiež klamať.

Zistili sme teda, že 1. a 6. strážca klamú a od začiatku vieme, že klame aspoň jeden z dvojice 2. a 5. strážca. Teraz už ale vieme, že z tejto dvojice klame práve jeden strážca, lebo spolu potrebujeme troch, čo klamú. Klamárov už máme dosť, a teda vieme, že 3. a 4. strážca musia hovoriť pravdu. Ak 3. a 4. strážca hovoria pravdu, potom kódom muselo byť nepárne číslo, ktoré obsahuje číslicu 2. Potrebujeme ešte zistiť, či hovorí pravdu 2. alebo 5. strážca. Ak by hovoril pravdu 2. strážca, kód by bolo číslo, ktoré vyhovuje 2., 3. a 4. podmienke. Jediné takéto číslo je 25, lenže pri ňom neklame 6. strážca. Ten ale klamať má, inak klamú len dvaja strážcovia. Z toho teda vieme, že 2. strážca musí klamať, a preto 5. strážca musí hovoriť pravdu.

Pravdu hovoria 3., 4. a 5. strážca. Nepárne prvočísla, ktoré obsahujú číslicu 2, sú len čísla 23 a 29. Číslo 29 sme ale vylúčili hneď na začiatku, keď sme zistili, že 1. strážca (ktorý toto číslo spomína) klame. Teda kódom je číslo 23 a klamú 1., 2. a 6. strážca.

Bodovanie:

za správne riešenie – 1b.; za vysvetlenie, ako sa k nemu dostať – 2b.; za ukázanie, že to je jediné správne riešenie – 2b.; V prípade nedostatočného vysvetlenia alebo nesprávnych argumentov boli body strhávané individuálne podľa závažnosti.

Úloha S5: Hádanky v tme – *Opravoval Pavol Koprda*

„Ja, bezpečnostný systém, tu mám nepárny počet guľôčok. Je ich viac ako 14. Rozdeľ ich na dve kôpky, pričom v každej kôpke musia byť aspoň 2 guľôčky. Ja každú z týchto kôpok rozdelím na dve neprázdne kôpky. *Ešte kým začneme hrať* si však vyber, či:

1. Ty dostaneš najmenšiu a najväčšiu z týchto štyroch kôpok a ja zvyšné dve.
2. Ja dostanem najmenšiu a najväčšiu z týchto štyroch kôpok a ty zvyšné dve.
3. Vyberieš si z predošlých dvoch možností až po rozdelení kôpok, ale za túto možnosť výberu mi zaplatíš 1 guľôčku.

Tvojím cieľom je mať čo najviac guľôčok." **Ako má Tomas hrať aby s *istotou* získal čo najväčší počet guľôčok? Svoje riešenie nezabudni zdôvodniť.**

Riešenie tejto úlohy rozdelíme na dve časti. V prvej časti ukážeme, že Tomas vie hrať tak, že získa aspoň o 1 guľôčku viacej ako stroj. V druhej časti ukážeme, že stroj vie vždy hrať tak, že Tomas nemá šancu získať s istotou o 2 guľôčky viac, ani o žiadny väčší počet viac. Vtedy sa nám podarí mať úlohu kompletne vyriešenú.

Na to aby Tomas získal aspoň o 1 guľôčku viac ako stroj stačí ak rozdelí guľôčky tak, že na jednej kôpke budú 2 guľôčky – **označme ju A** a na druhej zvyšok – **označme ju B**. Stroju neostáva nič iné ako kôpku s dvoma guľôčkami rozdeliť na dve kôpky po 1 guľôčke. **Kôpka B** bude určite obsahovať nepárny počet guľôčok, pretože na začiatku sme ich mali nepárne veľa a potom sme dve ubrali. Teda na tejto kôpke zostane nepárny počet guľôčok Teda stroj rozdelí **kôpku B** na dve z toho jedna bude väčšia ako druhá. Keď si Tomas na úvod vyberie možnosť jedna, a síce že dostane najmenšiu a najväčšiu kôpku, tak mu pripadne kôpka s 1 guľôčkou a väčšia z kôpok z pôvodnej **kôpky B.** Tým že **kôpka A** bola rozdelená na dve rovnaké kôpky, jednu polovicu **kôpky A** dostane stroj a jednu Tomas. **Kôpka B** bola rozdelená na väčšiu a menšiu kôpku a z nich Tomas dostane väčšiu, tak bude mať aspoň o 1 guľôčku viac ako stroj. Tým je hotová prvá časť riešenia.

Poďme na druhú časť. Nech Tomas použije akékoľvek rozdelenie, jedna kôpka bude mať párny počet guľôčok, tento počet vieme zapísať ako **2X** a jedna kôpka bude mať nepárny počet guľôčok, tento počet označme ako **2Y+1.** Je to preto, že ich počiatočný počet je nepárny. Stroj ich potom vie rozdeliť na kôpky s počtami **X, X, Y a Y+1.**

Vieme, že buď dostane Tomas najväčšiu a najmenšiu kôpku a stroj zvyšné dve, alebo to bude presne naopak. Teda ak si Tomas zvolí prvú možnosť, je to ako keby si stroj „zvolil" druhú možnosť. Poďme sa pozrieť, v akom vzťahu môžu byť čísla X a Y.

Prvý prípad je, že **X < Y**. Najmenšia kôpka má X guľôčok, najväčšia kôpka má Y+1 guľôčok. Stredné dve kôpky majú X a Y guľôčok. Ak teda Tomas zvolí prvú možnosť, dostane **X+Y+1 guľôčok**. Ak zvolí druhú, dostane **X+Y** guľôčok. Zvoliť tretiu možnosť sa mu neoplatí, pretože tak si môže vybrať, že dostane X+Y+1 guľôčok, ale zaplatí za to 1 guľôčku, a teda mu ich zostane len X+Y. Vidíme, že v tomto prípade dokázal stroj hrať tak, aby rozdiel medzi tým čo dostane stroj a čo dostane Tomas bol 1 guľôčka. Tomas teda vie získať najviac o 1 guľôčku viac, ako stroj.

Druhý prípad je, že **X = Y**. Teda mám kôpky s počtami X, X, X a X+1 guľôčok. Najmenšia kôpka obsahuje X guľôčok, najväčšia ich má X+1. Stredné dve majú každá X guľôčok. Ak Tomas zvolí prvú možnosť, dostane **X+X+1** guľôčok. Pri druhej možnosti dostane **X+X** guľôčok. Tretiu možnosť sa mu opäť zvoliť neoplatí, z rovnakých dôvodov, ako vyššie. Teda aj teraz stroj hrať tak, aby rozdiel medzi tým čo dostane stroj a čo dostane Tomas bol 1 guľôčka. A tak Tomas nemôže dostať viac ako 1 guľôčku navyše oproti stroju.

Tretí prípad je, že **X > Y**. Najväčšia kôpka má potom počet guľôčok X (a to aj v prípade, že X=Y+1), najmenšia má počet guľôčok Y. Po zvolení prvej možnosti dostane Tomas **Y+X** guľôčok. Druhá možnosť mu prinesie **Y+1+X** guľôčok, a tretia sa ani tentoraz neoplatí. Stroju sa teda aj tu podarilo dosiahnuť, aby bol rozdiel medzi Tomasovým a jeho počtom 1 guľôčka.

Všimnime si, že stroj vie vždy hrať tak, že rozdiel medzi tým, či si Tomas vyberie stredné kôpky, alebo najmenšiu a najväčšiu kôpku bude maximálne 1 guľôčka. To jasne hovorí, že Tomas nevie hrať tak, že by s istotou mal viac ako 1 guľôčku navyše oproti tomu, čo má stroj.

V prvej časti sme ukázali, že Tomas vie hrať tak, že bude mať o 1 guľôčku viac ako stroj a teraz sme ukázali, že lepšie hrať nevie. A tým je naša úloha vyriešená ☺

Bodovanie:
za nájdenie stratégie pre Tomasa – 2b.; za dôkaz, že lepšia stratégia neexistuje – 3b.