Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

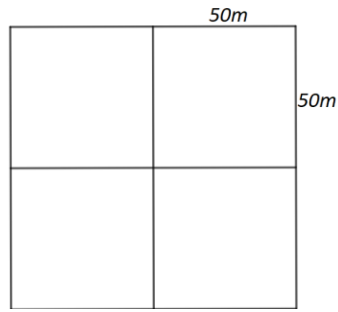
36. ročník www.pikomat.sk školský rok 2018/2019

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Trojuholníková strecha – *Opravovali Jakub „Kubo“ Poljovka a Matúš Zubčák*

„Tu máme štvorcový pozemok 100 × 100 metrov. Na tomto pozemku stojí deväť rovnako vysokých mrakodrapov v tvare ihlanu, pričom žiadne tri nestoja na jednej priamke. My by sme chceli špičky troch z nich spojiť trojuholníkovou strechou. Aby sa ale tá strecha nezrútila, jej plocha musí byť menšia alebo rovná 1/8 celkovej plochy pozemku, teda 1/8 × 100 × 100 = 1250 m^2. **Ide vždy vybrať trojica mrakodrapov medzi ktorými sa dá postaviť strecha – teda pre ľubovoľné rozostavenie deviatich mrakodrapov na pozemku?**“

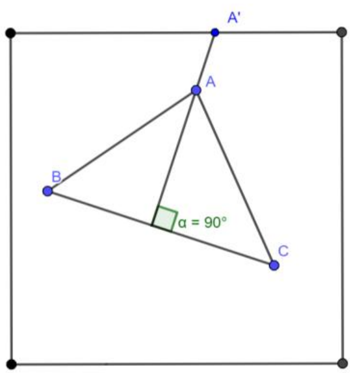
Rozdeľme si náš štvorcový pozemok 100x100 metrov na 4 menšie štvorcové pozemky veľkosti 50x50m. Potom nám určite platí, že každý mrakodrap má vrchol svojej strechy v aspoň jednom z tých 4 menších pozemkov.



Teraz vidíme, že určite **v niektorom zo štvorcov 50x50metrov budú aspoň 3 vrcholy mrakodrapov**. Ak by to tak nebolo, museli by byť v každom štvorci najviac 2 vrcholy, čo nám dá celkovo najviac 4·2=8 vrcholov.

Už vieme, že určite v aspoň jednom z tých 50x50m štvorcov budú aspoň 3 vrcholy, ktoré vieme pospájať a vytvoria trojuholník.

Teraz sa zamyslíme, aký najväčší trojuholník vieme umiestniť do takéhoto štvorca.

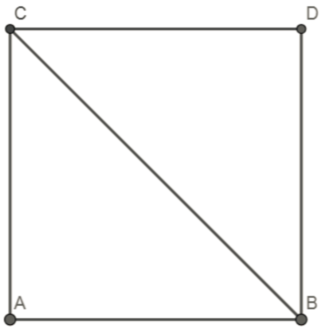


Majme trojuholník ABC, ktorý sa nachádza vo štvorci 50×50m. Predpokladajme, že niektoré (čiže aspoň jeden) z jeho vrcholov neležia na obvode štvorca. Pozrime sa teraz na takýto vrchol (na obrázku je to vrchol A). Tento vrchol vieme presunúť po výške $\mathbf{v_a}$ trojuholníka až do bodu A', ktorý sa nachádza na obvode štvorca. Vidíme, že obsah nového trojuholníka A'BC je určite väčší ako obsah trojuholníka ABC, lebo tieto trojuholníky majú

spoločnú stranu BC, ale trojuholník A'BC má dlhšiu výšku.
Vychádzame pritom zo vzorca na výpočet obsahu trojuholníka $\frac{a \cdot v_a}{2}$, kde a je strana trojuholníka a v_a je výška na túto stranu. Toto by platilo aj pre vrcholy B a C. Vidíme, že **ak chceme maximalizovať obsah trojuholníka ABC, musíme presunúť takýmto spôsobom všetky jeho vrcholy na obvod štvorca**.

Vezmime si teraz taký trojuholník, ktorého vrcholy ležia v rohoch štvorca, ako na obrázku trojuholník ABC. Pokúsime sa ukázať, že má najväčší obsah, aký vieme do štvorca vmestiť. Jeho obsah je $\frac{50 \times 50}{2}$ teda 1250 m^2 , pretože strana AC je výškou na stranu AB.

Dohodli sme sa, že všetky vrcholy trojuholníka ležia na stranách, poďme si teda povedať, ako sa mení obsah, keď presunieme niektorý vrchol trojuholníka z rohu niekam inam na stranu. Ak presunieme body B alebo C bližšie k bodu A, obsah sa isto zmenší (zmenší sa výška, alebo základňa). Ak bod C presunieme kamkoľvek na stranu CD, obsah trojuholníka zostane rovnaký, lebo sa nezmenila ani základňa ani výška. To isté platí pre posunutie bodu B po strane BD.



Ak presunieme bod A po ktorejkoľvek strane, vidíme, že sa tým skráti základňa alebo výška na ňu, a teda sa obsah zmenší.

Všetky trojuholníky, ktorých vrcholy ležia na stranách štvorca 50×50 majú teda buď obsah 1250 m^2, alebo menší. Ukázali sme, že existuje trojuholník, ktorý na stranách takéhoto štvorca leží, ak je jeho obsah čo najväčší, a preto môžeme s istotou povedať, že **vieme spojiť tri vrcholy mrakodrapov strechou s obsahom menším alebo rovným 1250 m^2**, a teda sa strecha nezrúti.

Bodovanie:

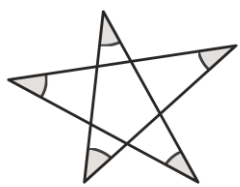
za rozdelenie štvorca 100×100m na štyri štvorce 50×50m – 3b.; za tvrdenie, že trojuholník zaberá najviac polovicu obsahu štvorca v ktorom sa nachádza – 1b.; za dôkaz tohto tvrdenia – 1b.

Poznámka:

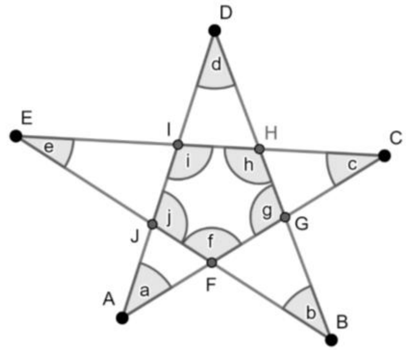
Pri riešeniach nerozoberajúcich všetky možné prípady rozmiestnenia mrakodrapov boli riešenia ohodnotené individuálne

Úloha S2: Trávnik – *Opravovali Adam „Santa" Šánta a Samuel „Samo" Banas*

„Neďaleko staviame chodníky v parku. Park má tvar päťuholníka a vchody doň sú v každom vrchole päťuholníka. Naša firma má za úlohu niektoré vchody spojiť chodníkmi ako na obrázku. Záhradníci však čoskoro budú medzi chodníky pokladať kobercový trávnik, a preto by chceli vedieť, aký je súčet piatich uhlov vyznačených na obrázku. **Aký je súčet veľkostí piatich vyznačených uhlov?**"



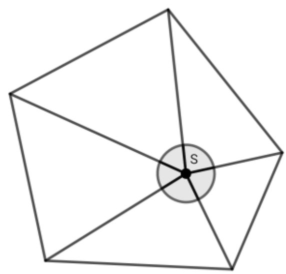
Označme si vrcholy a uhly v našom útvare tak, ako na obrázku.



Cieľom tejto úlohy je zistiť súčet veľkostí uhlov $a+b+c+d+e$. Ako pri skoro každej matematickej úlohe, existuje viacero rôznych postupov, ktoré vedú k správnemu riešeniu. Najviac z vás začalo svoje riešenie faktom, že súčet vnútorných uhlov v ľubovoľnom trojuholníku je 180°. To znamená, že súčet vnútorných uhlov trojuholníkov AGD, BHE, CIA, DJB a EFC si môžeme vyjadriť nasledovne:

$(a+g+d)+(b+h+e)+(c+i+a)+(d+j+b)+(e+f+c)=5\cdot 180°$ odkiaľ platí:

$2\cdot(a+b+c+d+e)+f+g+h+i+j=900°$



Pozrime sa teraz na súčet f+g+h+i+j. To je súčet vnútorných uhlov 5-uholníka. Dá sa ukázať, že tento súčet je vždy 540°. Ak totiž rozdelíme 5-uholník na päť trojuholníkov s jedným spoločným vrcholom S tak, ako na obrázku, stačí si uvedomiť nasledovné: Súčet vnútorných uhlov piatich trojuholníkov je 5·180°=900°. Súčet uhlov pri vrchole S je pritom 360°, takže súčet vnútorných uhlov 5-uholníka je 900°-360°=540°.

Teda platí $f+g+h+i+j\ =\ 540°$. Dosadíme:
$2\cdot(a+b+c+d+e)+540°=900°$
$2\cdot(a+b+c+d+e)=360°$
$a+b+c+d+e=180°$

Súčet veľkostí uhlov v cípoch 5-cípej hviezdy je 180°.

Bodovanie:
Ak ste úlohu riešili popísaným spôsobom, bodovanie bolo nasledovné: za fakt, že v trojuholníku je súčet uhlov 180° a v 5-uholníku 540° – 1b.; za správne zostavenie rovníc – 2b.; za správne úpravy – 1b.; za správny výsledok – 1b.

Poznámka:
Ak ste vyriešili úlohu len pre jeden konkrétny prípad - keď sa jedná o pravidelný útvar, mohli ste získať maximálne 3b.

Úloha S3: Investor – *Opravovali Katarína „Čeky“ Marčeková a Karolína „Kaja“ Pisoňová*

„V blízkej štvrti je blok 5 × 5 pozemkov kde sa má na každom pozemku postaviť jeden mrakodrap. Mrakodrapy bude stavať naša firma a firma SkysCorper. Investor však má divné požiadavky: Firmy musia stavať na striedačku v kolách, v každom kole stavia jedna firma. V každom kole musí firma urobiť jednu z nasledovných možností:

1. Postaviť zľava doprava v súčasnom rade pozemkov jeden alebo dva mrakodrapy.
2. Postaviť mrakodrapy na všetkých zostávajúcich nezastavaných pozemkoch v aktuálnom rade. V ďalšom kole teda druhá firma pokračuje na pozemku najviac vľavo v rade o jedna vyššie.

Stavať za začína z ľavého spodného rohu. Problém je v tom, že tá firma, ktorá zastavia posledný pozemok, má sľúbenú prémiu. Investor nám však dal na výber, či chceme stavať ako prví alebo ako druhí. **Mala by naša firma začínať alebo ísť ako druhá, aby získala prémiu? Aká musí byť naša stratégia, aby sme prémiu s istotou dostali?**“

Ak sa pozrieme na pozemok, odkiaľ sa začínajú stavať mrakodrapy, tak nám to nepovie veľa o tom, či chceme začínať alebo ísť druhý, a ako budeme chcieť postupovať, pretože máme veľa možností ako by sme my aj firma SkysCorper mohli stavať. Poďme sa radšej pozrieť na posledné pozemky, či nám to nepovie niečo viac.

Aby sme získali prémiu, tak musíme zastavať posledný pozemok. Tá firma, ktorá začne stavať posledný rad, vie zastavať celý tento rad, čím vie získať prémiu. Aby prémiu nemohla získať firma SkysCorper, tak musíme v poslednom rade začínať stavať my.

Na to, aby sme v poslednom rade mohli začínať stavať my, potrebujeme, aby posledný pozemok v 4. rade určite zastavala firma SkysCorper. Ako ale vieme toto dosiahnuť?

Poďme sa teraz pozrieť na začiatok štvrtého radu. Firma, ktorá v ňom začína má na výber všetky tri možnosti, ktorými vieme stavať mrakodrapy. Ak by dostavala celý rad, tak by postavila mrakodrap aj na poslednom pozemku, čo už vieme, že určite nechce, ak chce získať prémiu. Ak by postavila dva mrakodrapy, tak následne vie súper tiež postaviť dva mrakodrapy a donútiť firmu, ktorá začne stavať v 4. rade, zastavať posledný pozemok, takže nechce postaviť ani dva mrakodrapy na začiatku radu. Ak by však postavila iba jeden mrakodrap, tak môžu nastať tri situácie:

1. **Súper by dostaval celý rad** – takže by zastaval posledný pozemok, čo začínajúcej firme vyhovuje.
2. **Súper by postavil dva mrakodrapy** – začínajúca firma by mohla postaviť jeden mrakodrap, a tým by súper musel zastavať posledný pozemok.
3. **Súper by postavil jeden mrakodrap** – začínajúca firma by mohla postaviť dva mrakodrapy a súper by znova musel zastavať posledný pozemok.

Z tohto vidno, že firma, ktorá začne stavať rad, vie zabezpečiť, aby posledný pozemok v tomto rade určite zastaval súper. Preto, ak chceme aby firma SkysCorper postavila mrakodrap na poslednom pozemku v 4. rade, mali by sme v ňom začať stavať my. Ako ale dosiahnuť aby sme v 4. rade začínali stavať my?

Na to, aby sme začínali 4. rad my, firma SkysCorper by mala postaviť mrakodrap na poslednom pozemku v predchádzajúcom rade. Nepripomína nám toto niečo? Je to presne rovnaká situácia, ako keď sme chceli, aby postavila posledné políčko v 4. rade, a tým pádom chceme znovu začínať stavať aj v 3. rade a takto by sme mohli pokračovať až k prvému radu, v ktorom teda budeme chcieť tiež začínať stavať.

Ak by sme v prvom rade nezačínali stavať my ale firma SkysCorper, tak vedia využiť našu stratégiu a vtedy by sme nevedeli vyhrať, preto teda chceme určite začínať stavať ako prví.

Bodovanie:
výsledok – 0,5b.; myšlienka, že celý posledný rad musíme zastavať my – 1b.; myšlienka, že chceme začínať stavať každý rad a firma SkysCorper musí každý okrem posledného ukončiť – 1,5b.; zvyšná stratégia – 2b.; v prípade nedostatočného vysvetlenia niektorej časti riešenia boli body strhávané individuálne.

> **Úloha S4: Nedoriešená** – *Opravoval Marián „Majo" Poturnay*
> Zobral som si trojciferné číslo ABC, pričom cifry A, B a C boli rôzne. Potom som poprehadzoval jeho cifry, čím som vytvoril všetky možnosti poprehadzovania, teda ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Všetkých šesť čísel som potom sčítal. Takto som si postupne prechádzal trojciferné čísla. No potom som si všimol, že to je ešte zaujímavejšie ako som si myslel: **Koľko *rôznych* súčtov môžem dostať ak sú všetky poprehadzované čísla trojciferné (teda nezačínajú nulou)?**

Každé trojciferné číslo ABC sa dá napísať v tvare **100·A+10·B+1·C**. Keď takto napíšeme všetky z čísel ABC, ACB, BAC, BCA, CAB a CBA a sčítame, dostaneme:

ABC =	100·A	+ 10·B	+ 1·C
ACB =	100·A	+ 10·C	+ 1·B
BAC =	100·B	+ 10·A	+ 1·C
BCA =	100·B	+ 10·C	+ 1·A
CAB =	100·C	+ 10·A	+ 1·B
CBA =	100·C	+ 10·B	+ 1·A
	200·(A+B+C)	+ 20·(A+B+C)	+ 2·(A+B+C) = **222·(A+B+C)**

Vidíme tak, že celkový súčet je 222-násobok súčtu A+B+C, ktorý predstavuje **ciferný súčet čísla ABC**. Preto nám stačí určiť, koľko rôznych ciferných súčtov môže nadobúdať číslo ABC.

Žiadna z cifier čísla ABC nemôže byť 0. Ak by bola niektorá cifra nulová, začínalo by niektoré z čísel, ktoré dostaneme poprehadzovaním cifier, nulou a to nám zadanie zakazuje.

Keďže všetky cifry ABC majú byť podľa zadania rôzne a žiadna z nich nie je 0, tak **najmenší ciferný súčet** dosiahneme pre číslo, ktoré obsahuje tri najmenšie cifry – teda cifry 1, 2 a 3. Toto číslo má ciferný súčet 1+2+3=6. Podobne **najväčší ciferný súčet** dosiahneme pre číslo, ktoré obsahuje tri najväčšie cifry – teda cifry 7, 8 a 9. Toto číslo má ciferný súčet 7+8+9=24.

Všimnime si, že **každý ciferný súčet medzi 6 a 24 vieme dosiahnuť**. Nájdeme príklady:

6=1+2+3	10=1+2+7	14=1+4+9	18=1+8+9	22=5+8+9
7=1+2+4	11=1+2+8	15=1+5+9	19=2+8+9	23=6+8+9
8=1+2+5	12=1+2+9	16=1+6+9	20=3+8+9	24=7+8+9
9=1+2+6	13=1+3+9	17=1+7+9	21=4+8+9	

Vidíme, že **všetkých ciferných súčtov je 19**. Ako sme ukázali, každému cifernému súčtu zodpovedá práve jeden súčet ABC+ACB+BAC+BCA+CAB+CBA, takže **možno dostať 19 rôznych súčtov**.

Bodovanie:

za zápis čísla ABC v tvare 100·A+10·B+1·C – 1b.; za ukázanie, že výsledný súčet je 222·(A+B+C) – 1b.; za konštatovanie, že výsledný súčet závisí iba od ciferného súčtu – 1b.; za ukázanie, že žiadna z cifier nemôže byť 0 - 0,5b.; za nájdenie čísel s najmenším a najväčším súčtom – 0,5b.; za nájdenie príkladu na každý ciferný súčet – 0,5b.; za to, že súčtov je 19 – 0,5b.

Úloha S5: Práčovňa – *Opravoval Tomáš Ganz*

Vo väzení bolo 100 väzňov, ktorí chodili na služby do práčovne. Na službu chodili vždy v tímoch po troch väzňoch. Za mesiac musia mať všetci väzni odrobený rovnaký počet služieb väčší ako nula a žiadni dvaja väzni nemôžu byť spolu v tíme viac ako jeden raz. **Koľko *najmenej* služieb môžu väzni odrobiť za mesiac? Aký by bol pre daný počet služieb rozpis služieb pre väzňov (stačí nájsť jedno riešenie)?**

Poďme sa najprv pozrieť, koľko najmenej služieb môžu väzni odrobiť za mesiac. Máme 100 väzňov, takže dokopy všetkých služieb všetkých väzňov bude 100·x, kde x je počet služieb jedného väzňa za mesiac. Keďže sa väzni delia do trojíc, počet služieb, ktoré spolu odpracujú musí byť deliteľný tromi. Sto nie je deliteľné tromi, preto práve x musí byť deliteľné tromi. Najmenšie x deliteľné tromi je práve číslo 3. Počet služieb, ktoré spolu odpracujú bude teda 300 a jedna služba pozostáva práve z troch väzňov. Najmenší možný počet služieb tak bude 300/3=100.

Ďalšou úlohou je nájsť aspoň jedno takéto rozloženie služieb. Utvoríme trojice väzňov, a rozdelíme si ich po kolách tak, že v každom kole pôjde každý väzeň na službu najviac raz.

V **1. kole** budú väzni chodiť po trojiciach v poradí, takto: 1 2 3, 4 5 6, 7 8 9, ..., 97 98 99. To je 33 trojíc, teda 33 služieb. Zvýši nám väzeň 100, ktorý službu mať nebude.

V **2. kole** sa trojice budú tvoriť spôsobom, kde rozdiel najväčšieho a prostredného čísla a aj prostredného a najmenšieho čísla väzňa bude 3. Teda sa určite žiadni dvaja nestretli v prvom kole. Trojice budú vyzerať takto: 1 4 7, 2 5 8, 3 6 9, ..., 93 96 100. Vidíme, že väzeň 100 nahradil väzňa 99, ten teda v tomto kole službu nemal. Trojíc, a teda aj služieb, bolo aj v tomto kole 33.

V **3. kole** budú väzni rozdelení do troch skupín. Skupina A obsahuje väzňov 2 až 34, skupina B väzňov 35 až 67 a C väzňov 68 až 100. Prvá trojica bude z prvých členov každej skupiny, druhá trojica z druhých, tretia z tretích... Teda skupiny vyzerajú: 2 35 68, 3 36 69, 4 37 70, ..., 34 67 100. Opäť sme zabezpečili, že žiadni dvaja väzni sa nestretli ani v prvom, ani v druhom kole. Pritom väzeň číslo 1 službu nemal. Opäť sme utvorili 33 trojíc, teda 33 služieb.

To už je spolu 99 služieb. Väzni číslo 1, 99 a 100 ešte však boli iba na dvoch službách každý, každý na jednom kole oddychoval. Tí teda pôjdu spolu na poslednú službu, pričom vidíme, že sa žiadni dvaja z nich ešte nestretli. A to je pre nás posledná, 100tá služba. Podarilo sa nám zabezpečiť, aby každý väzeň odpracoval rovnako služieb (teda 3 služby), a zároveň sa žiadni dvaja nestretli dvakrát na službe. Teda počet 100 služieb je možné dosiahnuť a je to teda najmenší počet služieb.

Bodovanie:

za zistenie najmenšieho možného počtu služieb – 2b.; za nájdenie spôsobu, ako väzni môžu chodiť na služby – 3b.