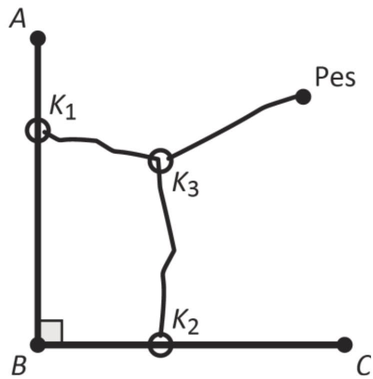
Vzorové riešenia 2. série zimnej časti, kategória 8–9

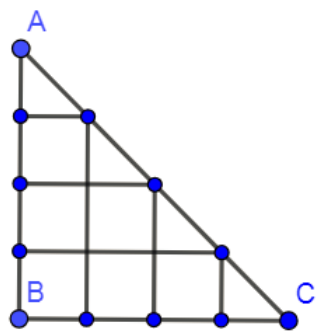
Úloha S1: Pes na dvore – *Opravovali Marianna Hronská a Fedor Župník*

V zemi boli zabodnuté tri kolíky A, B a C zanedbateľného priemeru, ktoré tvorili pravý uhol. Medzi kolíkmi A a B a medzi kolíkmi B a C boli napnuté 10-metrové povrazy, ako na obrázku. Na každom povraze bol voľný krúžok (K1 a K2). Tieto dva krúžky boli spojené tretím 10-metrovým povrazom. Na tomto povraze bol opäť voľný krúžok K3, ku ktorému bol 5-metrovým povrazom priviazaný pes. Pes nevedel prekročiť povrazy napnuté medzi kolíkmi, no krúžky sa mohli voľne pohybovať po povrazoch. **Aký tvar mala plocha, po ktorej sa pes mohol pohybovať? Aký bol obsah tejto plochy?** Poznámka: Povrazy medzi K1 a K2 a medzi K3 a psom nemuseli byť napnuté.



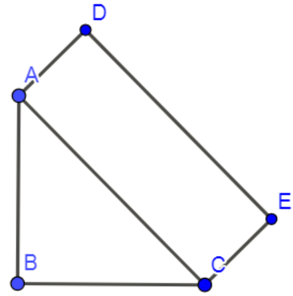
Skúsme najprv vyrátať, ako by sa mohol pohybovať krúžok k_3. Aby sme ho chceli dostali čo najďalej od kolíku A, môžeme ho dostať priamo ku kolíku C, pretože ako vidíme, lano medzi k_1 a k_2 je dlhé práve desať metrov. Ak by sme ho chceli dostať čo najďalej od kolíku C, rovnako sa dostane ku kolíku A.

Môžeme si všimnúť, že ak by bol v bode A a hýbal by sa smerom doprava, 10 metrové lano ho nepustí a teda musí ísť o toľko dole, o koľko ide doprava. Ak je teda n metrov smerom hore od bodu B, tak môže byť maximálne $10 - n$ metrov doprava od bodu B a naopak. Napríklad, ak sa dostane sedem metrov vpravo od B, môže ísť maximálne tri metre hore. Keďže za n si môžeme dosadiť akúkoľvek hodnotu od 1 po 10 (všetky *reálne* čísla od 1 po 10), vidíme, že čiara, po ktorej sa k_3 môže hýbať je strana AC. To je za predpokladu, že lano je napnuté, a preto sa k_3 môže hýbať po celom území pravouhlého trojuholníka ABC, ktorý má obsah $\frac{10 \cdot 10}{2}$ m^2, čiže **50m²**.



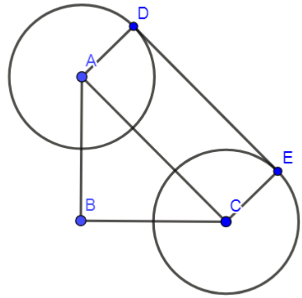
Teraz sa vráťme k 5 metrovému lanu na k_3.Keďže máme napojené 5-metrové lano ku k_3, ktorý sa môže pohybovať po strane AC, vieme vytvoriť obdĺžnik, ktorého jednu stranu tvorí

5-metrové lano a druhú AC. Podľa Pytagorovej vety vieme, že $|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|^2$. AB aj BC majú dĺžku 10, vieme teda, že AC bude $\sqrt{10^2+10^2}$. Obdĺžnik teda bude mať obsah $5 \cdot \sqrt{10^2+10^2} = \mathbf{50\sqrt{2}\ m^2}$.



Ďalej sa musíme pozrieť, ako to bude fungovať, keď k_3 bude v bodoch A alebo C. Aj keď pes nemôže prekročiť laná, môže obísť kolík a tak sa dostať na druhú stranu. Musíme si preto nakresliť kružnice okolo bodov A a C s polomerom 5 metrov.

Poďme si teda vyrátať obsahy týchto kružníc. Vidíme, že ich nemôžeme zarátať ako celé kružnice, keďže sa nám ich časti prekrývajú s trojuholníkom ABC a obdĺžnikom ACDE. Pozrime sa teda na časti prekrývajúce sa s trojuholníkom. Vidíme, že uhol častí kružníc vnútri trojuholníkov je 45° pretože ABC je pravouhlý a rovnoramenný, teda jeho vnútorné uhly sú 45°, 45° 90°. Do každej z týchto kružníc teda nemôžeme zarátať 1/8 jej obsahu, lebo 45° je osmina z 360°.



Ďalej si všimneme, že v obdĺžniku sú všetky vnútorné uhly pravé, preto do nich nemôžeme zarátať ďalšiu 1/4 ich obsahu, lebo 90° je štvrtina z 360°. Z každého obsahu kruhu musíme odrátať dokopy 3/8 jeho obsahu. Dva kruhy sú 16/8 kruhu, teda $\frac{16}{8} - 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{10}{8}$ obsahu jedného kruhu nám zostane. Obsah tohto územia sa teda vyráta nasledovne: $\frac{10}{8}\pi \cdot 5^2 = \frac{250\pi}{8} = \boldsymbol{\frac{125\pi}{4}}$.

Nakoniec tieto tri plochy, trojuholník, obdĺžnik a časti kruhov zrátame: $50 + 50\sqrt{2} + \frac{125\pi}{4}$, čo činí približne **218, 885 m²**.

Bodovanie:

Pre deviaty ročník a kvartu: za trojuholník ABC a vysvetlenie – 2b.; za obdĺžnik ABDE – 1b.; za kružnice – 1b.; za správny výsledok – 1b.

Pre ôsmy ročník a terciu: za trojuholník ABC a vysvetlenie – 1,5b.; za obdĺžnik ABDE – 1b.; za kružnice – 1,5b.; za správny výsledok – 1b.

Úloha S2: Zvýšenie platu – *Opravovali Karolína Pisoňová a Katarína „Čeky" Marčeková*

„Skupine robotníkov platím ročne N dolárov. Prirodzené číslo N má D rôznych deliteľov. Napríklad pre N = 10, D je 4, pretože 10 má štyroch rôznych deliteľov: 1, 2, 5 a 10. **Pre ktoré všetky prirodzené čísla N platí, že ich *dvojnásobok* má 2 × D rôznych deliteľov? Pre ktoré všetky prirodzené čísla N platí, že ich *trojnásobok* má 3 × D rôznych deliteľov?"**

Poďme sa najskôr pozrieť na prvú otázku.

Ak číslo N má D deliteľov, tak všetky tieto delitele budú deliť aj číslo 2N. Okrem nich pribudnú ešte dvojnásobky jednotlivých deliteľov, ktorých je znovu D. Ak by nových D deliteľov bolo iných ako pôvodných D deliteľov, číslo 2N by malo 2D deliteľov.

Jednotka delí každé prirodzené číslo, preto sa vždy bude nachádzať medzi pôvodnými deliteľmi. Medzi novými deliteľmi sa z nej stane dvojka. Ak sa dvojka nachádza aj medzi pôvodnými deliteľmi, tak máme číslo, ktoré sa nachádza v oboch skupinách deliteľov, a preto ich nebude 2N rôznych.

To, že sa dvojka nachádza medzi pôvodnými deliteľmi znamená, že číslo N je párne. Už teda vieme, že pre párne čísla ich dvojnásobok nebude mať dvojnásobný počet deliteľov. Poďme sa ešte pozrieť ako to bude s nepárnymi číslami.

Nepárne čísla majú len nepárnych deliteľov ale dvojnásobky týchto deliteľov budú vždy párne čísla. Je teda jasné, že žiadny z pôvodných deliteľov (nepárne číslo), nemôže byť rovnaký ako niektorý z nových (párne číslo). **Pre všetky nepárne čísla teda bude platiť, že ich dvojnásobok má dvojnásobný počet deliteľov.**

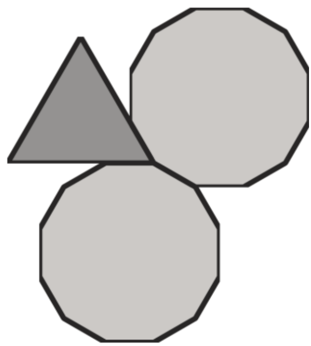
Teraz sa pozrime na druhú otázku.

Ak číslo N má D deliteľov, tak všetky tieto delitele budú deliť aj číslo 3N. Okrem nich pribudnú ešte aj trojnásobky týchto deliteľov a tých bude znovu D. Aj keby sa žiadne z nich neopakovali, malo by číslo 3N presne 2D deliteľov. Viac ich vzniknúť nemôže, lebo z každého z pôvodných deliteľov môže vzniknúť najviac jeden nový deliteľ (jeho trojnásobok). **Pre žiadne číslo teda nebude platiť, že jeho trojnásobok bude mať trikrát viac deliteľov.**

Bodovanie:
za kompletné odôvodnenie, že pri nepárnych číslach platí, že 2N má 2D deliteľov - 2b.; že pri párnych to platiť nemôže - 1b.; za kompletné vysvetlenie, že neexistuje N pre ktoré platí, že 3N má 3D – 2b.

Úloha S3: Obchody – *Opravovali Radka Bírová a Martin „Panda“ Svetlík*

„Neďaleko staviame obchodné domy. Jeden už máme postavený a je v tvare rovnostranného trojuholníka. Teraz by sme chceli postaviť ešte dva ďalšie obchodné domy, ktoré musia spĺňať tieto podmienky:

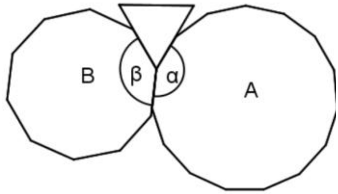


1. Obidva nové obchodné domy musia mať tvar *pravidelného* mnohouholníka.
2. Všetky tri obchodné domy musia mať spoločný jeden vrchol.
3. Každá dvojica obchodných domov musí mať jednu spoločnú stenu.

Napríklad na obrázku je jedna taká možná trojica obchodných domov. No my by sme chceli, aby jeden z dvoch nových obchodných domov mal čo najväčší počet stien.“ **Koľko najviac stien, pri splnení všetkých troch podmienok, mohol mať jeden z nových obchodných domov?**

Chceme, aby sa každý z troch útvarov dotýkal zvyšných dvoch stranou, a aby všetky tri mali spoločný vrchol. Keď teda zoberieme vnútorné uhly útvarov pri tomto vrchole, ich súčtom dostaneme 360°, teda plný uhol.

Postavená budova má tvar rovnostranného trojuholníka, ktorého veľkosť vnútorného uhla je 60°. Označme zvyšné dva mnohouholníky takto: ten s viac stranami bude A, a ten s menej stranami B. Budú mať pri spoločnom vrchole uhly α a β, a musí platiť, že $\alpha + \beta + 60° = 360°$, preto $\alpha + \beta$ =300°.



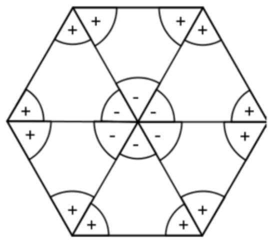
Z toho vyplýva, že čím väčší bude jeden z tých uhlov, tým menší bude druhý z nich. A preto aj **čím viac strán má jeden mnohouholník (A), tým menej ich bude mať ten druhý (B)**. Preto namiesto „čo-najviac-uholníka“ (A) budeme najprv hľadať „čo-najmenej-uholník“ (B), a k nemu potom nájdeme do páru ten druhý.

Pozrime sa najprv, aké uhly v nich môžme mať. O pravidelných mnohouholníkoch vieme, že sú konvexné, teda ich vnútorné uhly sú menšie ako 180°. Musí teda platiť, že $\boldsymbol{\alpha} < 180°$, a keďže $\alpha + \beta$ =300°, tak je jasné, že $\boldsymbol{\beta} > 120°$.

Niektorí z vás vedeli, niektorí si zrátali, že vnútorný uhol presne 120° má pravidelný šesťuholník. Keďže sme si ukázali, že potrebuje uhol väčší ako 120°, je jasné, že obchod B bude aspoň sedemuholník. Zistíme si, aký vnútorný uhol má sedemuholník, a aký vnútorný uhol ostane pre náš hľadaný n-uholník obchod A.

Ako ale zistím veľkosť vnútorného uhla v n-uholníku? Najprv zistím súčet jeho vnútorných uhlov, a potom to vydelím ich počtom.

Každý pravidelný n-uholník sa skladá z n rovnoramenných trojuholníkov. Zrátame uhly vo všetkých trojuholníkoch, a dostaneme $n \cdot 180°$**.** To je súčet všetkých vnútorných uhlov nášho n-uholníka (na obrázku označené pluskom), ale sú tam zarátané navyše aj uhly okolo stredu (označené mínusom). Tie spolu tvoria plný uhol, t.j. 360°, a tak tých 360° odrátame. Súčet vnútorných uhlov je teda $n \cdot 180° - 360°$ to vieme zapísať $\mathrm{n} \cdot 180° - 2 \cdot 180° = (\mathrm{n}-2) \cdot 180°$. Keď už poznáme súčet vnútorných uhlov, na vypočítanie jedného z nich nám stačí len tento súčet vydeliť n.



Pri sedemuholníku to teda vychádza $\frac{(7-2)\cdot 180°}{7} = \frac{5\cdot 180°}{7} = \frac{900°}{7}$. Aby sme nemuseli zaokrúhľovať, necháme si toto číslo v tvare zlomku.

Pre obchod A nám ostal uhol $360° - 60° - \frac{900°}{7} = \frac{1200°}{7}$. Teraz už len musíme zistiť, či existuje pravidelný n-uholník, ktorý má vnútorný uhol $\frac{1200°}{7}$.

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = \frac{1200°}{7} \qquad / \cdot 7n$$

$$(n-2)\cdot 7 \cdot 180° = n \cdot 1200° \qquad / \div 60°$$

$$(n-2) \cdot 7 \cdot 3 = n \cdot 20$$
$$21n - 42 = 20n \qquad / -20n + 42$$
$$n = 42$$

Mohlo by sa nám stať, že n by nevyšlo celé číslo, potom dvojica 7-uholník a iný mnohouholník nebola možná, a musel by sme ako obchod B použili ďalší „čo-najmenej-uholník“, t.j. 8-uholník, a skúsiť to s ním. Keďže nám to ale so sedemuholníkom vyšlo, a vieme, že žiadny iný menej-uholník sa použiť nedá, tak môžme prehlásiť, že druhý **obchod môže mať najviac 42 stien**.

Bodovanie:

za myšlienku „čím viac strán má jeden, tým menej ich má druhý“ – 1b.; za obmedzenia pre veľkosti uhlov – 1b.; za spôsob, ako rátať veľkosť vnútorného uhla n-uholníka – 1b.; za samotný výpočet – 1b.; za správny výsledok – 1b.

Poznámka:

Zopár riešiteľov by to malo úplne správne, keby nezaokrúhľovali 900°/7, a nepočítali s tým ďalej a nevyšlo im niečo akože by to musel byť 42,007-uholník. Ak ste ukázali, že ste to rátali aj so sedemuholníkom, a nevyšlo vám to len kvôli tomuto, a potom ste správne určili kombináciu 8- a 24-uholníka, mohli ste dostať do 4,5b.

Úloha S4: Zasadací poriadok – *Opravovali Timea Szöllősová a Tomáš Ganz*

„Za obdĺžnikovým stolom bude sedieť 10 ľudí, päť z každej strany. Budú tam manažér Adam so svojím poradcom Alexom a manažér Bert so svojím poradcom Bobom. Je nutné, aby Adam sedel oproti Alexovi a Bert oproti Bobovi. Takisto aj my dvaja musíme sedieť oproti sebe. Zvyšní hostia môžu sedieť akokoľvek. **Koľkými rôznymi spôsobmi sa môžeme za stolom usadiť?“**

Pozrime sa najskôr na tie miesta, kde sedia naše tri dvojice ľudí, ktorí musia sedieť oproti sebe a potom na zvyšné 4 miesta. Keďže jedna dvojica zaberá miesto na oboch stranách stola, tak máme pri stole vlastne 5 miest pre dvojice. Máme tri dvojice, takže počet všetkých možností rozmiestnenia dvojíc vypočítame ako 5·4·3=60, pretože prvá dvojica má na výber z piatich, druhá zo štyroch a posledná z troch miest pre dvojice.

Ďalej si musíme uvedomiť, že ľudia sa v rámci týchto dvojíc môžu tiež vymeniť. To znamená, že je rozdiel, či sedí Bob na pravej strane stola a Bert na ľavej alebo sedia naopak. Takže každou dvojicou sa počet možností zdvojnásobí, keďže každá z dvojíc má dve možnosti ako sa môže usadiť. Teda počet možností usadenia pre dvojice je 2·2·2·60=480.

Keď sme usadili dvojice, zostávajú nám štyria ľudia a štyri voľné stoličky. Prvý človek má 4 možnosti kam si sadnúť, druhý už len 3, tretí 2 a posledný má už len jednu voľnú stoličku a teda aj jednu možnosť kam si sadnúť. Takže pre každú možnosť usadenia dvojíc máme 4·3·2·1 možností (takýto súčin sa zvykne zapisovať aj 4! čo sa nazýva štyri faktoriál) na usadenie zvyšných štyroch ľudí. **Celkový počet možností je tým pádom 4!·480=24·480=11520.**

Bodovanie:
za vypočítanie počtu možností rozmiestnenia dvojíc za stolom – 2,5b.; za uvedomenie si, že ľudia v dvojici majú dve možnosti na usadenie – 1,5b.; za vypočítanie počtu možností rozsadenia pre zvyšných ľudí – 1b.

Úloha S5: Mušty – *Opravoval Erik Řehulka*
Na jedálnom lístku bolo pod sebou napísaných desať rôznych typov muštu, ktorých ceny za fľašu boli prirodzené čísla. Pán Host objednal niekoľko fliaš rôznych muštov podľa týchto pravidiel:

- Objednané mušty boli na jedálnom lístku napísané bezprostredne pod sebou.
- Z každého objednaného typu muštu objednal práve jednu fľašu.
- Objednané mušty vybral tak, že výsledná cena bola deliteľná desiatimi.

Mohol teda napríklad objednať jednu fľašu 1., 2. a 3. typu muštu alebo napríklad jednu fľašu 5., 6., 7. a 8. typu muštu. **Podarilo by sa mu *vždy* objednať mušty podľa týchto pravidiel, nech by ceny muštov boli *ľubovoľné* prirodzené čísla?**

Spíšme si najprv poznatky, s ktorými budeme rátať:

1. Bude nás zaujímať len posledná cifru ceny. Zvyšok čísla x po delení 10 je práve posledná cifra čísla x. To preto, lebo vieme každé takéto číslo x zapísať ako $x = 10 \cdot n + q$, kde q je práve posledná cifra čísla x.
2. Budeme sa snažiť dokázať že to nejde, budeme hľadať také ceny, pre ktoré to nebude platiť. A preto žiaden mušt nemôže mať cenu končiacu na 0, lebo by si pán Host kúpil tento jeden mušt a my sa snažíme dokázať, že existuje taký prípad, kedy si nemôže vybrať tie mušty tak, aby ich súčet bol deliteľný 10.

Označme si postupne ceny muštov A až J. Ďalej si označíme súčet samostatného A ako S_1, A+B ako S_2, až po A+B+C+...+J ako S_{10}. Vieme, že ak chceme docieliť to, že pán Host si nebude vedieť vybrať mušty, tak ani jeden z týchto súčtov nebude môcť končiť 0, lebo 0 je posledná cifra násobkov 10, ako sme už spomínali. Tieto súčty teda budú môcť končiť 1, 2, 3, 4,..., a 9, dokopy 9 možností. Máme ale 10 súčtov a 9 možností, **určite teda existujú dva súčty končiace na rovnakú cifru**.

Čo ale keď sa bude opakovať? Povedzme si, že rovnaké súčty budú S_2 a S_5, s poslednou cifrou 6. A+B=6, A+B+C+D+E=6. To znamená, že (A+B+C+D+E)-(A+B)=C+D+E=0. Všimnime si, že C+D+E=0 a keďže to sú za sebou idúce mušty, tak si ich môže pán Host vybrať. Teda splnil zadanie, súčet niektorých za sebou idúcich cien muštov je deliteľný 10.

Bude to ale platiť pre všetky kombinácie cien muštov? Áno, bude. Pokiaľ sa neopakuje posledná cifra v žiadnom zo súčtov, Host si vyberie tú sadu, ktorej súčet končí 0, a tak splní podmienku deliteľnosti 10timi. A pokiaľ nie, vždy sa tam nachádza dvojica súčtov, ktorej rozdielom dostanem takú sadu **po sebe idúcich** cien muštov, že ich súčet je deliteľný 10.

Bodovanie:
za správny výsledok – 1b.; za myšlienku, že ide o súčty zvyškov po delení 10timi – 1b.; za ukázanie, že keď máme dva súčty s rovnakým zvyškom, tak ich rozdiel bude deliteľný 10timi – 1b.; za dôkaz, že sa to podarí pre ľubovoľné ceny – 2b.