Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

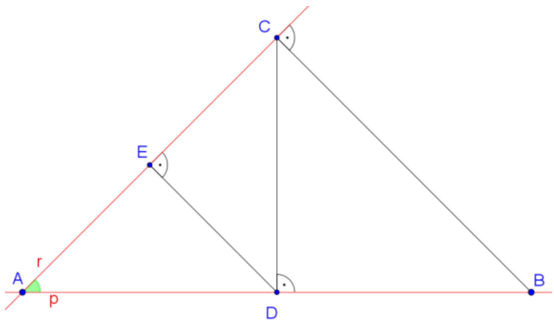
PIKOMAT

36. ročník www.pikomat.sk školský rok 2018/2019

Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Krátke prihrávky – *Opravoval Peter „Bubu“ Onduš*

Paľo a Rado sa rútia na brankára, každý z iného smeru. Paľo sa hýbe po priamke *p* a Rado po priamke *r*. Brankár Adam stojí v priesečníku týchto priamok, v bode *A*. Paľo prihrá z bodu *B* Radovi, a tomu v bode *C* puk priletí kolmo na priamku *r*, po ktorej sa hýbe. Rado prihrávku z bodu *C* vráti naspäť a Paľovi, ktorý je teraz už v bode *D*, prihrávka priletí kolmo na jeho priamku *p*. Paľo z bodu *D* prihrá Radovi, ktorý už je v bode *E*, a tomu znova prihrávka priletí kolmo na jeho priamku *r*. Brankár celý sa celý čas otáčal z jedného na druhého, ale keďže každá prihrávka bola kratšia a kratšia, nakoniec to nestihol a dostal gól. **O koľko stupňov sa musel brankár otáčať – teda aký veľký uhol zvierajú priamky *p* a *r* – ak vieme, že tretia prihrávka prešla polovičnú vzdialenosť ako prvá?**



Začnime, tak ako sa patrí, náčrtom. Chceme zistiť veľkosť uhla DAE, vyznačeného v náčrte.

Pozrime sa na trojuholníky ΔABC a ΔADE. Keďže zdieľajú uhol pri vrchole A a obe majú pri zodpovedajúcich si vrcholoch C a E pravý uhol, podľa vety uu sú podobné. Všimnime si, že v tejto podobnosti si úsečky BC a DE odpovedajú, no my vieme, že |BC|=2|DE| teda sú všetky strany ΔADE o polovicu kratšie ako ich zodpovedajúce strany v ΔABC. Preto je aj AC dvakrát dlhšie ako AE, a teda je EC rovnako dlhé ako AE(dve polovice dávajú dokopy celok).

Pozrime sa teraz na trojuholníky ΔADE a ΔCDE. Zdieľajú stranu DE, |EA|=|EC| a uhly AED a CED sú oba pravé, keďže ED je kolmé na priamku r. Teda sú podľa vety sus zhodné a to vo vyššie spomenutom poradí vrcholov. Teda sú uhly DAE a DCE rovnako veľké.

Pozrime sa na trojuholník ΔDAC. Jeho vnútorné uhly sú CDA, ktorý je pravý, a uhly DAE a DCE, ktoré sú rovnako veľké. Keďže je súčet týchto troch uhlov 180°, tak dostávame, že uhly DAE a DCE majú oba veľkosť 45°. Veľkosť uhla, ktorú hľadáme je teda 45°.

<u>Bodovanie</u>:
za dôkaz zhodnosti trojuholníkov ΔADE a ΔCDE alebo uhlov DAE a DCE – 2b.; za ukázanie, že |AE|=|EC| – 1b.; za správny výsledok a odôvodnenie – 2b.

Úloha S2: Logo – *Opravoval Juraj Jankovich*

René pri Handlovej vymýšľalo nové logo pre tím. Dohodli sa, že logo bude mať tvar trojuholníka s obvodom 15 cm. Obyvatelia vyrábali logo z paličiek o dĺžke 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 cm (z každej dĺžky mali práve jednu paličku). Obyvatelia nemohli paličky lámať, no strany trojuholníka mohli byť vytvorené z viacerých paličiek, ktoré sa dotýkali svojimi koncami. **Koľko *rôznych* trojuholníkov s obvodom 15 cm mohli obyvatelia vytvoriť pomocou paličiek?** Poznámka: Trojuholníky považujeme za rovnaké, ak majú rovnako dlhé všetky tri strany.

Najskôr si uvedomíme že pri skladaní trojuholníkov nám bude platiť trojuholníková nerovnosť, ktorá hovorí že: **Súčet dvoch kratších strán trojuholníku musí byť väčší ako jeho najdlhšia strana.** Alebo ju vieme interpretovať aj takto: **Súčet každých dvoch strán trojuholníku musí byť väčší ako tretia strana.**

Našou ďalšou podmienkou je obvod nového trojuholníku, ktorý má byť 15 cm. Z týchto dvoch podmienok zistíme že nemôžeme použiť paličky s dĺžkou 8 a 9 cm, pretože 15-8=7 čo znamená že ak máme stranu o dĺžke 8 tak súčet zvyšných strán by mal byť 7 čo je menej ako 8 a tým pádom nie je splnená trojuholníková nerovnosť a trojuholník nemôžeme zostrojiť. Pre paličku, ktorá má 9 cm to platí analogicky, to znamená že 15-9=6 a 9 (palička)>6 (súčet dvoch kratších strán). Takže sme zistili že **môžeme použiť len paličky s dĺžkou 1 až 7**.

Teraz vytvoríme trojuholníky so stranami 1 až 7, kde sa strany môžu opakovať, pokiaľ ich vieme vytvoriť z viacerých paličiek ktoré sme ešte nepoužili. Postupovať môžeme viacerými spôsobmi, najrýchlejšie ich vieme vytvoriť tak, že si určíme najdlhšiu paličku a hľadáme zvyšný súčet k 15tim.

K najdlhšej paličke ktorú môžeme použiť, to je s dĺžkou 7 cm palička, chceme vytvoriť trojuholník s obvodom 15 cm. To znamená že súčet dĺžok ostatných použitých paličiek bude 8 cm, ktoré vieme zložiť z týchto kombinácií dĺžok: 1, 7; 2, 6; 3, 5; 4, 4. V prípade 1, 7, 7 a 7, 4, 4 máme použité dve rovnaké dĺžky strany trojuholníka. Jednu vieme zložiť pomocou pôvodnej paličky danej dĺžky. Druhú stranu tej istej dĺžky vytvoríme pomocou dvoch paličiek: 7 zložíme napríklad z paličiek 2+5, 4 zložíme z paličiek 1+3. To sú trojuholníky o dĺžkach strán <u>**7, 1, 7**</u>; <u>**7, 2, 6**</u>; <u>**7, 3, 5**</u>; <u>**7, 4, 4**</u>. – nezáleží na poradí strán

Pri druhej najdlhšej paličke, ktorá má 6 cm, vieme postupovať rovnako. Zistíme že máme mať súčet dĺžok zvyšných dvoch strán 9 cm. Tieto strany môžeme zložiť jedine bez použitia paličiek väčších ako 6. Paličky dĺžok 8 a 9 cm nemôžeme použiť ako sme už predtým spomenuli a všetky kombinácie trojuholníka so stranou dlhou 7 cm sme už vypísali, takže sa budú jedine opakovať. Tým pádom nám zostávajú len možnosti: 4, 5; 3, 6. V prípade strán dĺžok 6, 6, 3 vieme dĺžku 6 cm zložiť z paličiek o dĺžkach napríklad: 1+5 alebo 2+4 To sú trojuholníky o dĺžkach strán <u>**6, 4, 5**</u>; <u>**6, 3, 6**</u>.

Pri paličke o dĺžke strany 5 vieme postupovať rovnako a vieme že trojuholník nebude mať dlhšiu stranu ako je 5 cm a preto nám zostáva jedine možnosť 5,5,5. Túto možnosť vieme zostrojiť ako 5; 2+3; 1+4. A získame trojuholník o stranách <u>**5, 5, 5**</u>.

Ak by sme chceli pokračovať, zistíme že ak je najdlhšia strana trojuholníka dlhá 4 cm, tak nie je možné zostaviť trojuholník, ktorý by vyhovoval našim požiadavkám o obvode 15, pretože 4+4+4= 12. Takže kratšie strany už nemusíme kontrolovať.

Bodovanie:
za správny výsledok – 0,5b.; za vysvetlenie a napísanie trojuholníkovej nerovnosti – 2b. (strhával som 0,5b. za spomenutie a nevysvetlenie); za postup, detaily a zmysluplnosť riešenia – 2,5b.

> **Úloha S3: Prilby** – *Opravovali Miroslav Macko a Tomáš Ganz*
> Piati hokejisti si zahrali hru. Zobrali si štyri biele a päť čiernych prilieb a zavreli sa v tmavej šatni. Tam si dal každý na hlavu prilbu tak, že nevedel jej farbu. Potom vyšli na svetlo, kde všetci videli prilby ostatných, no nie farbu tej svojej. Tréner sa ich opýtal, či vedia, akú majú na hlave prilbu. Všetci piati jednohlasne povedali „nie“. Tréner im dal 10 sekúnd na rozmyslenie a opýtal sa znova: „Už to viete?“ Teraz dvaja povedali „áno“ a traja „nie“. Tréner im dal ďalších 10 sekúnd na rozmyslenie, znova sa ich opýtal a vtedy už všetci piati povedali „áno“. **Akých farieb mali prilby a ako to zistili?**

Je dobrým zvykom si zapísať, čo nám hovorí zadanie. Vieme, že máme 5 čiernych prílb a 4 biele prilby pre piatich hokejistov. Teraz si môžeme prečítať prvú informáciu - na prvú otázku všetci odpovedali Nie. Čo to znamená? Znamená to, že každý sa pozrel na ostatné prilby a usúdil, že on môže mať aj bielu aj čiernu prilbu. Jediný prípad, kedy ako hokejista viem jednoznačne povedať akú mám prilbu, je keď vidím všetky prilby niektorej farby. Pri našom rozložení prílb to znamená, že na začiatku nikto nemal 4 biele prilby. V opačnom prípade, by hokejista, ktorý vidí 4 biele prilby povedal Áno, lebo by vedel, že má čiernu prilbu. (Dokopy sú k dispozícií 4 biele prilby, tým, že ich hokejista všetky vidí, tak on určite bielu prilbu nemá). Treba si uvedomiť, že keby hokejista vidí štyri čierne farby, tak stále môže mať bielu aj čiernu prilbu. Zistili sme napokon, že v hre nie sú 4 biele prilby, preto sa odteraz môžeme tváriť, že máme k dispozícií už iba 3 biele prilby.

V druhom kole otázok dvaja odpovedali Áno. Hokejisti s rovnakou prilbou vidia na ostatných hlavách to isté. Preto, keď hokejista povie áno, tak všetci hokejisti s rovnakou farbou prilby tiež povedia Áno (Tým, že dvaja hokejisti majú prilbu rovnakej farby, tak rovnako vidia prilbu toho druhého a aj zvyšných troch hokejistov. Takže majú rovnaké informácie o rozpoložení prílb a preto odpovedia rovnako).

Z toho si vieme vyvodiť logické pravidlo, že hokejisti, ktorí odpovedajú rôzne majú aj prilbu rôznej farby. Vieme, že dvaja odpovedali áno. Máme teda dve možnosti, na ktoré sa treba pozrieť.

Ak by daní dvaja hokejisti mali biele prilby, tak zvyšný traja hokejisti by mali čierne prilby. Hokejisti s bielymi prilbami by nevedeli jednoznačne určiť farbu svojej prilby, keďže každý z nich by mohol mať aj čiernu prilbu.

Druhá možnosť je, že daní dvaja hokejisti majú čierne, prilby. V tom prípade by obaja videli 3 biele a 1 čiernu prilbu. Keďže vedia, že bielych prílb je najviac 3, tak oni už štvrtú nemôžu mať. Preto títo dvaja hokejisti vedia jednoznačne určiť, že majú čierne prilby.

V treťom kole dvaja hokejisti s bielymi prilbami vedia svoju farbu, tak ako v minulom kole. Hokejisti s čiernou prilbou vedia, že bieli hokejisti už povedali, akú majú prilbu a preto aj oni vedia, že majú čiernu prilbu.

Vždy je dobrým zvykom zamyslieť, či je naše riešenie jediné. Zamyslime sa ako sme sa dostali k našej odpovedi. Tým, že v prvom kole všetci odpovedali Nie sme zistili, že tam určite nie sú 4 biele prilby. Následne na základe informácie, že dvaja hokejisti povedali Áno a traja nie sme uvažovali už len o dvoch možných prípadoch, keďže hokejisti ktorí odpovedali rôzne majú prilby rôznej farby. Jeden z nich sme vylúčili a preto nám ostalo jediné možné riešenie. **Hokejisti mali 3 biele a 2 čierne prilby.**

Bodovanie:
za správny výsledok – 0,5b.; za zistenie, že nemôžu byť štyri biele prilby – 1b.; za následný postup k výsledku – 2,5b.; za ukázanie, že náš výsledok je jediný možný – 1b.

Úloha S4: Rituál – *Opravovala Kristína Prešinská*

Anton mal rituál, že si cez každú prestávku násobil prirodzené čísla idúce po sebe. Začínal vždy od jednotky. Keď prestávka skončila, Anton musel násobenie nechať tak. Všimol si, že číslo, ktoré mu po násobení vyšlo, bolo takmer vždy deliteľné nasledujúcim prirodzeným číslom, ktorým sa súčin chystal vynásobiť. **Kedy to funguje a kedy nie?**

Súčin čísel $1·2·3·…·n$ sa nazýva faktoriál a označujeme ho ako $n!$. Anton si násobí čísla 1, 2, 3, 4… a tak ďalej, pričom na konci prednášky skončí číslom, ktoré si označíme $n-1$. Nasledujúce číslo, ktorým tento súčin bude deliť je n. Zadanie úlohy vieme interpretovať i takto: Kedy je $(n-1)!$ deliteľný číslom n? Kedy je $(n-1)!/n$ celé číslo?

Keď sa zaoberáme deliteľnosťou, tak nám mnohokrát pomôže prvočíselný rozklad. Je to tak i v tomto prípade. Aby $(n-1)!$ bolo deliteľné n, tak sa prvočíselný rozklad n musí nachádzať v prvočíselnom rozklade $(n-1)!$. Rovnako $(n-1)!/n$ je celé číslo vtedy, keď celý menovateľ sa vyskytuje i v čitateli. Potom keď všetko spoločné (celý menovateľ) v tomto zlomku $(n-1)!/n$ vykrátime, tak dostaneme celé číslo.

Problém nastáva, keď n je prvočíslo. Prvočíslo n má tieto dva delitele: 1 a n. V súčine $(n-1)!$ sú všetky činitele menšie ako n, teda aj prvočíselný rozklad $(n-1)!$ obsahuje len menšie prvočísla ako n. Preto $(n-1)!$ nie je deliteľné n, keď n je prvočíslo.

Keď je n zložené číslo také, že ho vieme zapísať ako $x·y$, kde $1<x<y<n$, tak sme vyhrali. Pretože aj x, aj y je jedným z činiteľov súčinu $(n-1)!$. Takýto prípad nastane keď n má aspoň štyri delitele alebo skôr aspoň dvoch iných ako 1 a n. Vtedy môžeme za x zobrať napr. najmenší z deliteľov väčší ako 1 a y môže byť všetko ostatné z prvočíselného rozkladu n, teda $y=n/x$ (teda naozaj $x·y=n$).

Kedy má n menej ako štyri delitele a súčasne je zloženým číslom? To, že je to zložené číslo znamená, že n vieme zapísať ako nejaké $x·y$, kde x a y sú väčšie ako 1 a menšie ako n. Čiže x aj y sú deliteľmi čísla n. Ak však $x=y$ a x (teda aj y) je prvočíslo, tak n má len tri delitele a nimi sú 1, x a $x·x=n$. Ako to funguje, keď $n=x·x$, kde x je prvočíslo? Z týchto troch deliteľov je len x väčšie ako 1 a menšie ako $x·x=n$. Ukážeme, že ani toto nie je problém, pretože v súčine $(n-1)!$ sa prvočíslo x nachádza v týchto činiteľoch: $\mathbf{x}$, $2·\mathbf{x}$, $3·\mathbf{x}$, …, $(x-1)·\mathbf{x}$ ($x·x$ už nie, pretože $x·x=x^2=n$, teda nie je v $(n-1)!$). Teda ho tam máme presne $x-1$ krát a nám stačí ho tam mať 2 krát. Pozor, pozor, čo ak x-1<2? Teda, čo ak ho tam síce máme x-1 krát ale, to je v skutočnosti len raz? No tento prípad nastane vtedy a len vtedy, keď platí x-1<2, teda x<3. Keďže x je prvočíslo, tak jediné také x je 2. Ak x=2, tak n=4 a vtedy naozaj (n-1)!/n nie je celé číslo.

Týmto sme prešli všetky možnosti aké môže byť n-ko. Teda (n-1)! je deliteľný n, práve vtedy keď n je zložené číslo iné ako 4. Toto môžeme povedať i tak, že vyhovujú všetky n, ktoré nie sú prvočísla alebo 4.

Bodovanie:
za správnu odpoveď – 1b.; za vysvetlenie, prečo prvočíselné n nefunguje – 1b.; za riešenie v prípade, keď je zloženým číslom – 3b.

Úloha S5: Trezor – *Opravoval Matej Moško*

Tréner chcel vymyslieť štvorciferný kód trezoru pozostávajúci z rôznych cifier C a D tak, aby nasledovali v poradí $CDCD$. Pritom musí pre nejaké cifry A a B platiť, že $ABAB - BABA = CDCD$. **Pre ktoré všetky štvorciferné kódy $CDCD$ toto platí? Ako by to bolo v prípade, že by pre kód $CDCD$ malo platiť $DBDB - BDBD = CDCD$?** Poznámka: Všetky čísla $ABAB$, $BABA$, $CDCD$, $DBDB$ a $BDBD$ sú štvorciferné, teda nesmú začínať nulou.

V prvej časti úlohy, kde $ABAB - BABA = CDCD$, sa najprv pozrime na to, aké vôbec môžu naše hľadané cifry A, B, C, D byť. Keďže v zadaní je napísane, že sa jedná o 4-ciferné čísla, tak vieme, že A, B, C sú > 0. A keďže $CDCD$ je kladné číslo, tak $A > B$. Teraz si ukážeme dva rôzne postupy riešenia tejto úlohy.

Naše čísla si rozpíšeme podľa dekadického zápisu. Dekadický zápis znamená, že napríklad číslo 1234 vieme zapísať ako $1000 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 1 \cdot 4$. Takto rozpíšeme aj

$$\boldsymbol{ABAB} - BABA = \boldsymbol{1000A} + \boldsymbol{100B} + \boldsymbol{10A} + \boldsymbol{B} - 1000B - 100A - 10B - A$$

Spočítame Áčka a Béčka a dostaneme:

$$CDCD = ABAB - BABA = 909A - 909B = 909 \cdot (A - B)$$

Takže vidíme, že $CDCD$ jej 909-násobok rozdielu $A - B$. Tento rozdiel môže postupne dosahovať hodnoty od 1 po 8. 9 už nie, lebo A je najviac 9 a B je aspoň 1 (keďže sú obe viac ako nula). Z toho už teda len dopočítame jednoducho $CDCD$ a ukážeme si možný príklad $ABAB - BABA$, z ktorého by daný kód mohol vzniknúť.

$\boldsymbol{A - B}$	$\boldsymbol{CDCD = 909 \cdot (A - B)}$	$\boldsymbol{ABAB - BABA}$
1	909(3-ciferný – neplatný)	-
2	1818	4242 - 2424
3	2727	6363 - 3636
4	3636	5151 - 1515
5	4545	7272 - 2727
6	5454	8282 - 2828
7	6363	8181 - 1818
8	7272	9191 - 1919

V druhej časti úlohy máme $DBDB - BDBD = CDCD$. Všimnime si, že zápis je úplne rovnaký ako pri $ABAB - BABA = CDCD$, len s tým rozdielom, že $A = D$. Teda znovu by sme urobili náš postup s dekadickým zápisom a mali by sme, že $909 \cdot (D - B) = CDCD$. Znovu si urobíme tabuľku, ale teraz ešte skontrolujeme, aké nám vyjde B, nakoľko D je aj na ľavej aj na pravej strane rovnice.

$D - B$	$CDCD$	D	$B = D - (D - B)$	Platný/Neplatný
1	909 (3-ciferný)	-	-	Neplatný
2	1818	8	8-2 = 6	Platný
3	2727	7	7-3=5	Platný
4	3636	6	6-4=2	Platný
5	4545	5	5-5=0	Neplatný
6	5454	4	4-6=-2	Neplatný
7	6363	3	3-7=-4	Neplatný
8	7272	2	2-8=-6	Neplatný

Vidíme v tabuľke, že keď sme spätne skontrolovali, či by naše kódy mohli vzniknúť a vypočítali sme hodnotu B, tak nám B niekedy vyšlo nula alebo záporné, čo nemôže, lebo my už vieme, že B musí byť kladné.

Takže kódy $CDCD$, ktoré vzniknú ako $ABAB - BABA$ môžu byť **1818**, **2727**, **3636**, **4545**, **5454**, **6363**, **7272** a kódy, ktoré vzniknú ako $DBDB - BDBD$ môžu byť **1818**, **2727**, **3636**.

Bodovanie:

Prvá časť : za zistenie podmienky pre C a D aj s kompletným vysvetlením – 1,5b.; za správny výsledok – 0,5b. Druhá časť: za zistenie podmienky pre B a D s kompletným vysvetlením – 1,5b.; za kontrolovanie a vylučovanie nesprávnych kódov – 1b.; za správny výsledok – 0,5b.