Takže pre 2-farebné kocky máme **6 + 12 + 6 = 24** možností. U trojfarebných kociek je to nasledovne: A) 4+1+1 -> teda 4x jedna farba, 1x druhá farba a 1x tretia farba. Počet možností je obdobný ako pri podmnožine 4+2, lebo zase môžu byť tie 2 (1+1) vedľa seba, alebo oproti sebe. 6 možností. B) 3+2+1 -> 3B+2Ž+1HZ, 3B+2HZ+1Ž, 3Ž+2B+1HZ, 3Ž+2HZ+1B, 3HZ+2Ž+1B, 3HZ+2B+1Ž. Pre každý spôsob existujú 3 uloženia. Pre jednoduchosť označím ako **A** farbu, ktorá sa vyskytuje 3x, farbu, ktorá sa vyskytuje 2x označím **B**, a tú zvyšnú **C**. Teraz buď budú všetky **A** „v rohu“ (a teda aj **B** a **C** v rohu opačnom), alebo **B-C-B** „v páse“, alebo **C-B-B** „v páse“. Takže 6*3=18 možností. C) 2+2+2 -> 6 možností: 1. Všetky 3 dvojice rovnakých farieb ležia oproti sebe. 2,3,4. Jedna dvojica leží oproti sebe a zvyšné 2 vedľa seba. Tá dvojica môže byť v troch rôznych farbách. 5. Všetky tri dvojice ležiace vedľa seba. 6. Toto bol kameň úrazu väčšiny riešení. Veľa z vás nenašlo práve túto 6.možnosť. Je to vlastne tak ako v 5. ale zrkadlovo. Teda pre 3-farebné kocky máme **6 + 18 + 6 = 30** možností.
Keď spočítame 3+24+30, vyjde **57** a to je správne riešenie.
Bodovanie: 5 bodov dostali tí, čo mali správne riešenie, a jasne vysvetlený postup, ktorý ich k výsledku zaviedol. Všeobecne ste mohli body získať za postup max.4 a za odpoveď/resp. výsledok 1b Ak ste našli menej/viac ako 57 riešení, strhával som body nasledovne: +/- 4 rieš. 0,3b dolu. +/-12 r. 0,5b dolu. +/- 24 r. 1b dolu, prinajhoršom 1,3b dolu. 1b za odpoveď som dal, ak ste napísali, že žiak nemal pravdu, a koľko kociek sa dá nájsť. Ak chýbal počet kociek, bola odpoveď len za 0,5b.

Príklad S6: *opravoval Michal Priky Prikler*
Treba si uvedomiť, že čím viac motoriek máme na trati, tým menšiu dráhu prejdú. Čiže, ide nám o to, aby sa počet motoriek postupne znižoval (stačí, ak „do cieľa“ dojde len jedna) a aby sa využil všetok benzín, čo najefektívnejšie. Najlepšie teda bude, keď jedna motorka skončí a z nej sa prečerpá zvyšný benzín do ostatných motoriek a to tak, aby v nich bola nádrž plná! Teda prvé prečerpávanie bude, keď pretekári spotrbujú 1/5-nu nádrže = 2l. Vtedy sa z jednej motorky doplnia nádrže zvyšných motoriek „do plna“ a tá jedna už je vonku. Doteraz prešli dráhu **50 km**. Ďalšie prečerpávanie bude, keď spotrebujú 1/4–nu nádrže = 2,5l, t.j **62,5 km**. Vtedy sa „odstavuje“ ďalšia motorka a na trati nám už ostávajú len 3 s plnými nádržami. Po minutí tretiny nádrže (**83 1/3 km**) motorky opäť prečerpajú benzín a ostanú nám už len 2. A posledné prečerpávanie bude, keď tie dve minú polovicu nádrže a prejdú **125 km**. Vtedy nám na trati ostane už len jedna motorka s plnou nádržou, ktorá ešte prejde **250 km**. A koľko teda prešla tá jedna motorka? Sčítam všetky úseky, ktoré motorky prešli, pretože „víťaz“ bol na trati stále. Teda ak tím pozostáva z 5 členov, „víťaz“ prejde 50 km + 62,5 km + 83 1/3 km + 125 km + 250 km = **570 5/6 km.** Ak by v tíme bolo 10 pretekárov, postupovali by sme úplne rovnako a vyšlo by nám, že víťazi by boli prešli **732 61/252 km**.
Bodovanie: 3b za taktiku a presný opis postupu prečerpávania; 2b za oba správne výsledky.

PIKOMAT ,**20. ročník** **šk. rok 2002/2003**

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: *opravoval Peter Mitec Miťko*
V tejto úlohe bolo podstatné zúžiť okruh skúšaných možností na čo najmenej a teda v prvom rade určiť, prečo hrali práve 3 kolá. Myšlienka spočívala v tom, že v hre boli stále iba tie 3 karty a teda počas 1 kola musel byť ich súčet nemenný (menili iba majiteľov). Potom ale celkový počet bodov na konci hry (12+13+26=51), vydelený tým súčtom, dáva počet kôl. Aj čísla kariet, aj počet kôl sú prirodzené čísla a sú preto deliteľmi 51 (prvočíselný rozklad). Sú to teda: 1,3,17,51. Minimálny súčet kariet je 1+2+3=6 a maximálny 7+8+9=24. Súčet kariet v 1 kole je potom určite iba 17 a hrali určite 3 kolá. Teraz bolo viacero možností riešenia: buď ste si zistili, že najväčšia karta musí byť 9 alebo 10 (8+8+7=23), ak majú vôbec dávať súčet Martinových kariet. Dostali ste 4 možnosti: 10,10,6, 10,9,7, 10,8,8, 9,9,8. Z toho, že kolá sú 3 a Mišo dostal v poslednom kole najväčšiu kartu, ste zistili tretie číslo a ak dávali súčet 17, boli to určite ony. Správna možnosť bola iba 10,6,1. Druhá možnosť riešenia bola vypísať si všetky možné súčty 17: 10,6,1, 10,5,2, 10,4,3, 9,7,1, 9,6,2, 9,5,3, 8,7,2, 8,6,3, 8,5,4, 7,6,4 (bolo ich 10). Potom stačilo vylučovacou metódou „musia sedieť aj ostatné súčty“ určiť, že to boli iba karty 10,6,1. Veľmi pekná úvaha bola zistiť, prečo každý z bratov musel dostať počas 3 kôl prave 2-krát tú istú kartu (3-krát nemohli, lebo Mišo mal 1 najväčšiu a vždy inú tiež nie, potom by predsa ich súčty bol 17). Doriešiť ste to mohli napr. spôsobom 3 rovnice o 3 neznámych. Správna odpoveď teda bola: Peter dostal v 1. kole strednú kartu.
Bodovanie: prečo hrali 3 kolá cez delitele: max 2,1 b, za každý chýbajúci deliteľ – 0,1 b, Za peknú úvahu prečo 10,6,1: 0,9 b a ak ste si povedali bez zdôvodnenia, že 10 je najväčšia karta: -0,6 b. Za správnu odpoveď: 0,2 b, za správny priebeh hry: 0,8 b. Za chýbajúce, či nesprávne možnosti (ak ste ich už vypísali): – 0,1 b, ak ste začali 10 a ostatné možnosti nevylúčuli – 0,2 b až – 0,3 b.

Príklad S2: *opravoval Drát(ik) Peter Drábik*
Pre hľadané 3-cif. čísla platí:
A+B+C=pč pč=prvočíslo
A.B.C=n^3 n =prirodzené číslo
najväčšia číslica je 9 n^3=maximálne 9.9.9
pč=max. 23 (9+9+9=27, ale to nie je pč, najbližšie menšie pč je 23)

n^3	**rozklad na pč**	**najväčšia komb. ABC**	**súčet**	**OK**	**komentár**
1^3	1.1.1	111 (jediná komb.)	3	nie	A+B+C≠pč.
2^3	2.2.2	811	10	nie	A+B+C≠pč.
3^3	3.3.3	931	13	áno	
4^3	2.2.2.2.2.2	881	17	áno	
5^3	5.5.5	555 (jediná komb.)	25	nie	A+B+C≠pč.
6^3	2.3.2.3.2.3	964	19	áno	
7^3	7.7.7	777 (jediná komb.)	21	nie	A+B+C≠pč.
8^3	2.2.2.2.2.2.2.2.2	888 (jediná komb.)	24	nie	A+B+C≠pč.
9^3	3.3.3.3.3.3	999 (jediná komb.)	27	nie	A+B+C≠pč.

Z možností prichádzajúcich do úvahy je najväčšie 964. => **ABC=964.**
Pre hľadané 4-cif. čísla platí:
A+B+C+D=pč

A.B.C.D=n^4 n =prirodzené číslo
najväčšia číslica je 9 n^4=maximálne 9.9.9.9
pč=max. 31 (9+9+9+9=36, a najbližšie menšie pč je 31)
Zo štyroch číslic môžeme utvoriť viacero rôznych štvoríc, ale cif. súčet ani súčin sa nemení.
Preto sme vybrali tie najväčšie z možných kombinácií.

n^4	rozklad na pč	kombinácia ABCD (ciferný súčet)
1^4	1.1.1.1	1111 (4)
2^4	2.2.2.2	8211 (12), 4411 (10), 4221 (9), 2222 (8)
3^4	3.3.3.3	9911 (20), 9331 (16), 3333 (12)
4^4	2.2.2.2.2.2.2.2	8841 (21), 8822 (20), 8442 (18), 4444 (16)
5^4	5.5.5.5	5555 (20)
6^4	2.3.2.3.2.3.2.3	9982 (28), 9944 (26), 9863 (26), 9664 (25), 6666 (24)
7^4	7.7.7.7	7777 (28)
8^4	2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2	8888 (32)
9^4	3.3.3.3.3.3.3.3	9999 (36)

Z týchto možností nevyhovuje ani jedna, lebo neplatí A+B+C+D=pč.
Neexistuje také ABCD.
Michal sa snažil nájsť 3-cif. číslo 964 a 4-cif. číslo, ktoré neexistuje.
A ešte čosi k tabuľkám: prečo sme rátali len po 9? Lebo ciferný súčin 3-ciferného, resp. 4-ciferného je maximálne 9^3, resp. 9^4.
Bodovanie: Trojciferné: spolu 2,5b: z toho za výsledok 0,5b. Štvorciferné: spolu 2,5b: z toho za výsledok 0.5b.
Za dobrú úvahu, ale ak si 0 považoval za prirodzené číslo tak celkovo 0,5b + 0,5b.

Príklad S3: *opravoval Martin Malic Handlovič*
Označíme si žiakov ako A, B, C, D, E. Keďže každý žiak má iné číslo, tak si môžeme povedať, že A>B>C>D>E. Päticu s najmenším súčtom nájdeme tak, že postupne zistíme, aké najmenšie môže byť E. Tu si pomôžeme malou tabuľkou „víťazných dvojíc“(v tabuľke číslo vľavo označuje E a čísla vpravo označujú všetky čísla s ktorými je podiel súčtu a rozdielu celé číslo.).
1 – 2,3
2 – 1,3,4,6
3 – 1,2,4,5,6,9
4 – 2,3,5,6,8,12
5 – 3,4,6,7,10,15
6 – 2,3,4,5,7,8,9,10,12,18
7 – 5,6,8,9,14,21
Takže ak by E=1, tak je málo vítazných dvojíc. Potrebujeme ich aspoň 4. Jednotku môžme teda vylúčiť. Ak by E=2, tak nám opať neostanú aspoň 4 dvojice. 2 vypadáva. Ak by E=3, tak máme päticu 3,4,5,6,9, ale 5 a 9 nevyhrajú. teda 3 vypadáva. Ak by E=4, tak nám ostane pätica 4,5,6,8,12, ale 5 a 8 nevyhrajú, teda aj 4 vypadáva. Ak by E=5, tak máme päticu 5,6,7,10,15, ale 10 a 7 nevyhrajú. Aj 5 vypadáva. Ak E=6, tak nám ostane sedmica 6,7,8,9,10,12,18, ale 18 nevyhrá s 10,8,7, teda vypadáva. Podobne 7 nevyhrá s 10,12,18 a tiež vypadáva. Ostane nám pätica 6,8,9,10,12 a ľahko si aj sami overíte, že všetko skutočne sedí. A má súčet 45. A teraz ešte ukážeme, že je skutočne tá s najmenším súčtom. E nemôže byť menej ako 6, ani 6 a tak ak by mala byť nejaká pätica s menším súčtom ako 45, tak E musí byť aspoň 7. Lenže už 7,8,9,10,11 dáva súčet 45 a ostatné pätice, nemusia byť ani neprehrávajúce, budú dávať súčet aspoň 45 a teda 6,8,9,10,12 je riešením. HURÁ!!! ☺
Komentár: Viacerí ste rátali s nulou ako prirodzeným číslom. Lenže nula **nie je** prirodzené číslo. No a ešte viac z Vás neoverilo, že 6,8,9,10,12 je skutočne najmenší súčet.
Bodovanie: Za výsledok bolo 0,5 boda, za overenie 0,5 boda, za postup riešenia od 0 do 1,5 boda, za zdôvodnenia od 0 do 2 body a za overenie, že je to skutočne najmenší sučet bolo 0,5 boda. Tí čo rátali s nulou ako prirodzeným číslom, tak majú od 0 do 1 boda podľa kvality riešenia.

Príklad S4: *opravovala Alenka Kovárová*
Najskôr si zopakujeme, že obsah trojholníka je $\mathbf{a.v_a/2}$, kde **a** je jedna zo strán trojuholníka a $\mathbf{v_a}$ je kolmá na **a** (na tú kolmosť niektorí z vás pozabudli). Obsah rovnobežníka je $\mathbf{x.v_x}$, kde **x** je jedna jeho strana a $\mathbf{v_x}$ výška na túto stranu. Tieto dva vzťahy budem využívať. Pri čítaní si kreslite obrázky zobrazujúce text, aby ste ho ľahšie pochopili.
Kôl K nemôže byť ani jeden z kolov na strane AD ani na strane CD, lebo raz by neexistoval trojuholník ADS a druhýkrát CDK. Ak by K bol na AB, tak potom by trojuholník CDK zaberal polovicu obsahu z rovnobežníka ABCD (pretože majú rovnaké základne aj výšky) a keby mal mať ADS 4-krát väčší obsah, musel by byť 2-krát väčší ako samotný ABCD, čo je nezmysel, keďže S je vnútri ABCD. Takže K je jeden z piatich vnútorných kolov na strane BC. Nech si vyberiem ktorýkoľvek z týchto kolov, tak trojuholník $S_{ADK} = ½\, S_{ABCD}$ (pretože opäť majú rovnaké základne aj výšky) a pretože $S_{ADK} = S_{ADS} + S_{ASK}$, tak $S_{ADS} \leq S_{ADK} = ½\, S_{ABCD}$. Takže z toho potom vieme aj, že $S_{CDK} = ¼\, S_{ADS} \leq 1/8\, S_{ABCD}$, teda výška trojuholníka CDK môže byť najviac osmina z výšky rovnobežníka. ABCD (to kvôli tomu, že CDK a ABCD majú rovnakú základňu – stranu CD). Túto podmienku spĺňa len kôl, ktorý je najbližšie k bodu C na strane BC, jeho výška je 1/6 z výšky rovnobežník ABCD. Bod S je potom niekde na úsečke DK, ľahko sa dá vypočítať, že v jej dvoch tretinách.
Bodovanie: $K \notin AD$ 0,5 b, $K \notin CD$ 0,5 b, $K \notin AB$ 1 b, nájdenie správneho K 1 b, odôvodnenie správnosti K 2 b.

Príklad S5: *opravoval Peter Comp Ambrož*
Správny počet možností je **57**. Príklad sa dal riešiť rôznymi metódami, no ja som zvolil metódu vypisovaním si všetkých možností. Celý problém si rozdelíme na 3 základné skupiny: 1. Kocky jednofarebné, 2. Kocky dvojfarebné, 3. Kocky, kde sú použité všetky tri farby. V prvej skupine je to jednoduché: Máme k dispozícií 3 farby, a teda aj možnosti tu budú len **3** (celá kocka Hráškovozelená, alebo Bordová, alebo Žltá). Pri 2-farebných je to o niečo viac. Môžeme totiž zvoliť 3 metódy rozmiestnenia tých dvoch farieb. A) 1+5 -> 1 stena prvej farby a zvyšných 5 stien druhej farby. Možnosti 1Ž+5B, 1B+5Ž, 1Ž+5HZ, 1HZ+5Ž, 1B+5HZ, 1HZ+5B. Teda máme 6 možností. B) 2+4 -> 2Ž+4B, 2B+4Ž, 2Ž+4HZ, 2HZ+4Ž, 2HZ+4B, 2B+4HZ. To by bolo tiež 6 možností, ale pozor, je ich 2x viac, lebo tie dve steny môžu byť buď susediace (1 spoločná hrana), alebo oproti ležiace (žiadna spoločná hrana). Teda 12 možností. C) 3+3 -> 3B+3Ž, 3Ž+3HZ, 3B+3HZ. Samozrejme x2, lebo 3 zhodné farby môžu byť vedľa seba (t.j. v páse), alebo „v rohu“ (majú spoločný roh). 6 možností dohromady.