PIKOMAT
17. ročník šk. rok 1999/2000

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti

Príklad 1: (Lenka Gažová)

Pôvodný počet vajec – x
1. krát predala – (x/2 – 1) vajec
2. krát predala – (x/3 – 1) vajec
3. krát predala – (x/6 – 1) vajec
zostali 3 vajcia

x - (x/2 - 1) - (x/3 - 1) - (x/6 - 1) = 3
x - x/2 + 1 - x/3 + 1 - x/6 + 1 = 3
(6x – 3x – 2x – x)/6 + 3 = 3
0 = 0

Riešeniami rovnice sú teda všetky reálne čísla, ale babka predávala len celé vajcia. Ak chceme aby 1/2, 1/3 a 1/6 zo všetkých vajec bolo prirodzené číslo (nemôže predať záporný počet vajec), musí byť počet vajec deliteľný 2, 3, 6 zároveň t.j. musí byť násobkom 6. Počet vajec = 6 nevyhovuje lebo 1/6 zo 6 bez 1 = 0, a babka predala vždy aspoň 1 vajce.

Príklad 2: (Kaťa Antoničová)

Musíme si uvedomiť tri základné veci:
A) Na to, aby sme dokázali deliteľnosť číslom 6, nám stačí dokázať deliteľnosť číslami 2 a 3.
B) Ak je jeden z činiteľov deliteľný číslom x, tak celý súčin je deliteľný číslom x
(lebo číslo deliteľné číslom x sa dá zapísať ako a*x a potom platí (a.x).b.c = x.(a.b.c)).
C) V rade prirodzených čísel je každé druhé deliteľné dvoma a každé tretie deliteľné troma.

A z tohoto už ľahko dokážeme to, čo sme chceli. Keďže ide o trojicu čísel idúcich za sebou, je v nej určite aspoň jedno číslo deliteľné dvoma a práve jedno číslo deliteľné troma. Preto súčin týchto čísel je deliteľný dvoma aj troma a teda aj šiestimi. A to sme chceli dokázať...

Príklad 3: (Táňa Fislová)

Príklad začneme počítať od posledného dňa, počas ktorého slimák vylezie 4m. 10 – 4 = 6m
Za deň vylezie 4m, ale za noc skĺzne 3m. Ráno je o 1m vyššie ako predchádzajúce ráno.
6 : 1 = 6 teda 6m lezie slimák 6dní a nocí. Posledné 4m posledný deň. Vrchol stromu dosiahne za 6 + 1 = 7 dní a 6 nocí.

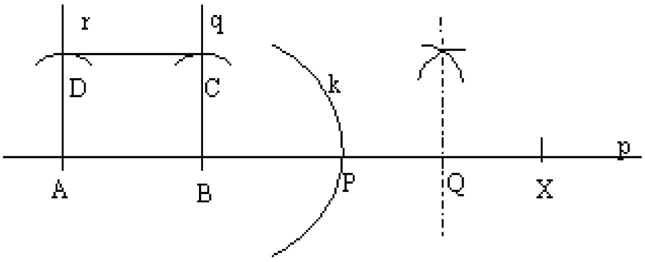
Príklad 4 : (Ondrej Bašták)

Máme danú jednu stranu AB a obvod obdĺžnika AX. Na zostrojenie obdĺžnika ABCD potrebujeme zistiť veľkosť jeho druhej strany BC. Obdĺžnik je štvoruholník, ktorého protiľahlé strany sú rovnako veľké a všetky susedné strany sú na seba kolmé. Veľkosť strany BC zistíme buď výpočtom, alebo graficky : 1. výpočtom : Obvod obdĺžnika vypočítame AX = 2(AB + BC). Odtiaľ vyjadríme BC = AX/2 - AB.

2.graficky : Prenesieme veľkosť AB na BX. Bod, ktorý vznikne označíme P. PX rozdelíme na polovicu. Stred označíme Q. PQ má rovnakú veľkosť ako BC.

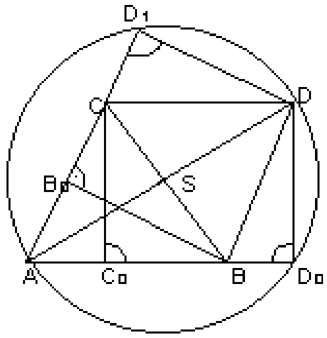
Postup konštrukcie
1. p
2. A, B, X
3. k, k(B,AB)
4. P, P je prienik k a BX
5. Q, Q je stredom PX
6. q, q p, B patrí q
7. r, r p, A patrí r
8. C, C patrí q, BC = PQ
9. D, D patrí r, AD = PQ
1O. obdĺžnik ABCD

Konštrukcia:



Príklad 5: (Dáša Horáková)

Príklad sa dá riešiť viacero spôsobmi. Tu je jeden z nich: Doplnením ΔABC na rovnobežník ABDC, bod D získame predĺžením ťažnice $t_a = AS$ (S-stred strany BC), pričom $|AS| = |SD|$. To, že je to skutočne rovnobežník, vyplýva zo zhodnosti ΔASC a ΔDSB (sus) a ΔASB a ΔDSC (sus). Ak z bodu D urobíme kolmicu na $\leftrightarrow AB$, (získaný bod označme D_0), bude platiť: $CC_0 \| DD_0$ (C_0 je päta výšky vc), lebo $|\angle BD_0D| = |\angle BC_0C| = 90°$, a $|C_0C| = |D_0D| = v_c$(lebo $AB \| DC$). ΔAD_0D je pravouhlý, poznáme dĺžky dvoch jeho strán D_0D, AD, vieme ho teda zostrojiť . Podobne, keby sme z bodu D urobili kolmicu na stranu AC, získame bod D_1 a bude platiť $|D_1D| = v_b$. ΔAD_1D je pravouhlý, poznáme dĺžky dvoch jeho strán D_1D, AD, takisto ho vieme zostrojiť (D_1 leží na Talesovej kružnici nad priemerom AD). Konštrukcia:



Zostrojíme AD:
1. A,p,q; $A \in p$, $p \| q$, $d(p,q) = v_c = 7$cm.
2. k; $k(A, r = 2\ t_a = 8$cm).
3. D,E; $D,E = k \cap q$. Ďalej budem písať postup už len pre bod D, rovnako by sa postupovalo aj pre bod E.

Zostrojíme bod D_1, D_1':
4. S; S-stred AD.
5. l; $l(D, r = v_b = 5$cm).
6. t; $t(S, r = |AS| = 4$cm).
7. D_1, D_1'; $D_1, D_1' = l \cap t$.

Zostrojíme bod C:
8. C; $C = \rightarrow AD_1 \cap q$ (C';$C' = \rightarrow AD_1' \cap q$).

Zostrojíme bod B, B´:
9. B; $B = \rightarrow CS \cap p$ (B';$B' = \rightarrow C'S \cap p$).
Môžeme to urobiť, lebo S je stred úsečky BC.

Takto získame ΔABC a $\Delta AC'B'$, ktoré nie sú zhodné. Ak by sme pokračovali rovnako aj pre bod E, dostali by sme ďalšie dva: $\Delta AC_eB_e \cong \Delta ABC$ a $DAB_e'C_e' \cong \Delta AC'B'$ (sú to zrkadlové obrazy). Teda riešením sú dva nezhodné trojuholníky: ΔABC a $\Delta AB_e'C_e'$.

Príklad 6: (Miša Ačová)

Pre každý pravidelný n-uholník platí, že je stredovo súmerný. V našom prípade stredová súmernosť (alebo aj inak povedané – otočenie o 180 stupnov) priradí bodom A, M, E, F postupne body D, N, B, C. A keďže stredová súmernosť zachováva veľkosti uhlov aj dĺžky strán, platí, že útvary AMEF a DNBC majú rovnaký obsah.

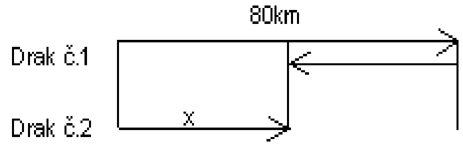
Poďme teraz vypočítať obsah rovnobežníka ANDM. Vieme, že to je rovnobežník, lebo strany AN a DM sú rovnobežné (vyplýva to z vlastností pravidelného 6-uholníka), sú rovnako veľké (3 cm) a rovnako veľké sú aj strany AM a DN (keďže 6-uholník je symetrický), a teda musia byť tiež rovnobežné. Na výpočet obsahu potrebujeme poznať dĺžku jednej strany a veľkosť výšky na túto stranu. Dĺžku jednej strany poznáme – je to strana AN (alebo aj DM, keďže v rovnobežníku sú protiľahlé strany rovnako veľké) a jej veľkosť je 3 cm (polovica zo strany AB). Ďalej vieme, že výšku na túto stranu tvorí úsečka NM. Je to určite výška, lebo NS (S je stred 6-uholníka) je výška v trojuholníku ABS a MS je výška v ESD. Označme si túto výšku 2.x (uvidíme, že jej presnú hodnotu nebudeme pri výpočte potrebovať), pričom x predstavuje veľkosť výšky každého zo 6 trojuholníkov, ktorými je 6uholník tvorený (sú to tie trojuholníky, ktoré majú 2 vrcholy niektoré zo susedných vrcholov 6-uholníka a tretí je vrchol S). Všetky tieto výšky sú rovnaké, lebo trojuholníky sú rovnaké a rovnostranné. Dorátajme teda obsah ANDM (základňa . výška) = 3 . 2 . x = 6x

Na zvyšok výpočtov budeme potrebovať vedieť obsah celého 6-uholníka. Je rovný obsahu 6 malých trojuholníkov so stranou 6 cm a výškou x, teda $S_{ABCDEF} = 6 \cdot (6 \cdot x / 2) = 36/2\ x = 18x$.

Keď od tohto obsahu odrátame 6x, čo je obsah 4-uholníka ANDM, zostane nám 12x na zvyšné 2 útvary, ktoré sú ale rovnaké, takže každý z nich má obsah rovný 6x, čo je rovnako ako tretí 4-uholník, čím nám teda vyšlo, že všetky 3 útvary majú rovnaký obsah.

Príklad 7: (Palyno – Palo Kováč)

K tomuto príkladu bolo možné pristupovať rôznymi spôsobmi. Jeden z nich: Treba si uvedomiť, že drak č.1 je dvakrát rýchlejší ako drak č.2. Teda prejde za rovnaký čas dvojnásobok vzdialenosti, ktorú prešiel drak č.1. (Označme si dráhu prvého ako s_1 a dráhu druhého ako s_2.)



Všimneme si, že drak č.1 prešiel 80 km a ešte sa vrátil (80-x)km, tu stretol draka č.2. Drak č.2 prešiel iba x km, kým stretol draka č.1. Spolu teda prešli (80+80-x)+x=160 km. Vieme, že $s_1=2s_2$ a $s_1+s_2=160$ km, teda $3s_2=160$ km, $s_2=53$ 1/3 km. Drak č.2 prešiel 53 1/3 km, teda draci sa stretli 53 1/3 km od dediny.

Príklad 8: (Martin Hriňák)

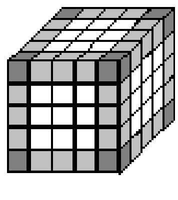
1. riešenie : Veže budeme postupne umiestňovať na šachovnicu. Pre umiestenie prvej veže máme 25 možností – môžeme ju umiestniť na ľubovoľné políčko šachovnice. Táto veža nám ohrozuje riadok a stĺpec, na ktorom stojí. Keďže majú jedno políčko spoločné (to, kde stojí táto veža), ohrozuje nám 9 políčok. Pre umiestnenie druhej veže máme teda 16 možností. Druhá veža nám ohrozuje tiež 9 políčok, ale dve z nich už ohrozuje aj prvá veža, teda nám ohrozuje 7 nových políčok. Pre tretiu vežu máme teda 9 možností. Podobných spôsobom ukážeme, že pre štvrtú vežu nám ostali už len štyri možnosti. Máme teda 25.16.9.4 = 14 400 možností. Ale teraz si musíme uvedomiť, že všetky veže sú rovnaké. Každá možnosť je započítaná 24-krát, lebo všetkých permutácií zo štyroch prvkov je 24. Preto musíme 14 400 vydeliť 24. Dostávame tak 600 možností.

2. riešenie : Keďže veže sú štyri a šachovnica je 5x5, tak vždy nám ostane práve jeden stĺpec a práve jeden riadok voľný, lebo ak sa veže nemajú ohrozovať, tak musia byť v rôznych riadkoch. Tento riadok a aj stĺpec sú jednoznačne určené políčkom, v ktorom sa pretínajú. Takýchto možností máme 25. Ak si teraz odmyslíme tento stĺpec a riadok, dostávame šachovnicu 4x4, na ktorú máme umiestniť 4 veže. Aby sa veže neohrozovali, musí byť každá v inom riadku aj stĺpci. Prvú vežu môžeme umiestniť do prvého stĺpca štyrmi spôsobmi. Druhú vežu už môžeme umiestniť do druhého stĺpca len troma spôsobmi, lebo prvá veža nám obsadila jeden riadok. Tretiu vežu môžeme umiestniť dvoma spôsobmi a poloha poslednej veže je jednoznačne určená polohami prvých troch veží. Môžeme ich teda rozmiestniť 4.3.2.1 = 24 spôsobmi. Znamená to teda, že všetkých možností rozostavenia veží je 24.25 = 600.

Komentár : Úloha sa dala pochopiť viacerými spôsobmi (a našli sa aj takí, ktorí ju vôbec nepochopili). Viacerí z vás uvažovali aj o tom, že môžeme otáčať aj šachovnicu. Napísali, že potom bude počet možností 600 : 4 = 150. To ale nie je pravda, lebo niektoré pozície sú zo všetkých strán rovnaké. Týmto postupom vyjde 153 riešení. Takýto výsledok mal len jeden riešiteľ. Za správne riešenia som však považoval aj tie, kde vyšlo 600 možností. Najčastejšou chybou bolo to, že ste zabudli na to, že veže sú rovnaké, a vyšlo vám 14 400 možností. Za takéto riešenia sa dali získať najviac tri body. Veľa z vás riešilo úlohu tak, že si jednotlivé situácie kreslilo a povedalo, že riešení je toľko, koľko ste ich našli. Chýbalo však zdôvodnenie, že ich viac nie je. Za takéto riešenia ste mohli dostať 0 až 1,5 bodu podľa počtu nájdených možností. Za správny výsledok ste mohli získať jeden bod. Za riešenia so správnym výsledkom a s postupom sa dali získať tri až päť bodov.

Príklad 9: (Alenka Kovárová)

Po rozrezaní sa veľká kocka rozpadne na 5.5.5=125 malých kociek. Najskôr sa pozrieme na množstvo kociek s rôznym počtom zafarbených **stien**.



Takže na obrázku vidíme, že v 8-mich vrcholoch kocky sa nachádza 8 (označené čiernou) kociek, kde každá z nich má zafarbené 3 **steny**. Ďalej na hranách, ale nie vo vrcholoch sa nachádzajú malé kocky, ktoré majú zafarbené 2 **steny** (označené šedou). Keďže veľká kocka má 12 hrán a na každej tejto hrane sú tri, tak spolu bude oných kociek 3.12=36. Ďalej na kocke vidíme kocky s ofarbenou jednou **stenou** (označené bielou). Na každej stene je takých kociek 9 a keďže veľká kocka má 6 stien, tak spolu bude týchto kociek 9.6=54. Zvyšné malé kocky, ktoré nevidíme tvoria kocku 3.3.3, teda je ich 27 a nemajú zafarbenú ani jednu **stenu**. No a pretože že nie je jasné, čo sa považuje za ofarbenú hranu, je nutné ďalej riešiť príklad dvoma spôsobmi.

Prvý predpoklad: Hrana je ofarbená vtedy, keď je hranou ofarbenej steny. Potom čierne kocky majú ofarbených 9 **hrán**, šedé 7 **hrán**, biele 4 **hrany** a tých 27 uprostred nemajú ofarbenú ani jednu **hranu**.

Druhý predpoklad: Hrana je ofarbená vtedy, keď je hranou dvoch susediacich ofarbených stien. Potom čierne kocky majú ofarbené 3 **hrany**, šedé jednu **hranu**, biele a tých 27 tiež ani jednu **hranu**.

počet hrán	0	1	2	3	4	5	6	7	9
1.predpoklad	27	0	0	0	54	0	0	36	8
2.predpoklad	27+54=81	36	0	8	0	0	0	-	-

Bodovanie: Kto uviedol ten odstavec vedľa kocky, mal +0.5 bodu. Kto neuviedol jeden z predpokladov, mal -1bod (ak neuviedol ani jeden, tak -2 body), komu chýbal postup, -2 body a kto mal nesprávny výsledok, tak -1 bod.

Príklad 10: (Charon µ - Lukáš Medlen, použité riešenie Pavla Šuta)

Prvý chlapec mal zelenú čiapku. [*+0,1 bodu (0b, ak to bolo odôvodnené úplne nesprávne)*]

Posledný chlapec mohol vidieť len kombináciu *zelenej* a *modrej* čiapky alebo dve *zelené*. [*+1 bod*] Ak by videl dve *modré*, nebol by povedal, že nevie, akú má čiapku, pretože by si bol istý, že má *zelenú* – všetky dve *modré* by videl na **2 chlapcoch** pred sebou. [*+1 bod*] Ak by **prostredný** (druhý) chlapec videl na **prvom** *modrú* čiapku, nebol by povedal, že nevie, akú má on sám, [*+1 bod*] lebo z vyhlásenia **posledného** chlapca si vyvodil, že on (**prostredný**) a **prvý** chlapec majú aspoň jednu *zelenú* čiapku (nemajú obaja *modré*) a tú by videl pred sebou na **prvom** chlapcovi. Preto musel **druhý** chlapec vidieť na **prvom** *zelenú* čiapku [*+1 bod*], čo si tento uvedomil a preto prehlásil, že vie, akú má čiapku. [*+0,9 bodu zvyšok*]

[*Ak bolo niektoré vysvetlenie neúplné, strhol som 0,1 – 0,2 bodu*]

Najviac chýb bolo gramatických, ale tie sa, samozrejme, nebodujú (na vaše šťastie). Druhá najčastejšia chyba bola nesprávne používanie slova „kombinácie“ – vy ste určite mysleli variácie. „modrá a zelená“ je taká istá kombinácia, ako „zelená a modrá“ ale sú to dve rôzne variácie. Nakoľko ste toto nemali odkiaľ vedieť, (nie všetky učiteľky matematiky na ZŠ sú také dobré, ako bola tá moja) ani túto chybu som nemohol počítať do bodovania. Ďalšia, tentoraz pre mnohých osudná chyba bolo neprečítanie si zadania. Veľa z vás často (nie len tento príklad, toto kolo či tento rok) počíta iný príklad, ako je v zadaní, alebo sa v riešení odvoláva na niečo, čo sa tam vôbec nehovorí. Ďalšie chyby, ktoré sa vyskytovali: uvažovanie len so šiestimi možnosťami rozloženia čiapok (bolo ich sedem), vynechanie vysvetlení (odôvodnení) alebo riešenie len prvej časti príkladu – veľa z vás v polovici prestalo riešiť. Pár z vás si tiež nevšimlo v zadaní zmienku o **troch** chlapcoch a uvažovali ste, že ich bolo päť. Na to len zopakujem, **čítajte zadania!!!**

Príklad 11: (Efka Rosíková)

Pri riešení príkladu nám najlepšie pomôže uvedomiť si, ako sa písomne násobí a ďalej fakt, že pri násobení deviatky prirodzenými číslami od 1 po 9 sa je koncová cifra výsledku vždy iná: **1**.9 = **9**, **2**.9 = 1**8**, **3**.9 = 2**7**, **4**.9 = 3**6**, **5**.9 = 4**5**, **6**.9 = 5**4**, **7**.9 = 6**3**, **8**.9 = 7**2**, **9**.9 = 8**1** a napokon aj **0**.9 = **0**. Uvedená vlastnosť sa zachová pri násobení deviatky ľubovoľným prirodzeným číslom končiacim danou cifrou (napríklad 43**2**.9 = 388**8**).

```
     1999
.   68223
---------
     5997
    3998
   3998
 15992
11994
---------
136377777
```

Teraz stačí postupovať “od konca”, t.j. ako pri písomnom násobení: Na konci výsledku má byť päť sedmičiek. Aby som dostala číslo 7 na konci výsledku, musím vynásobiť číslo 1999 číslom, ktoré sa končí číslicou 3. Aby som dostala na konci výsledku číslo 77, musím vynásobiť číslo 1999 číslom, ktoré má pred číslicou 3 číslicu 2, aby po jej vynásobení bolo na konci výsledku číslo 8 (viď druhý riadok, predposledný stĺpec násobenia), pretože jedine **8**+9 = *1*7. Aby som dostala na konci výsledku číslo 777, musím vynásobiť číslo 1999 číslom, ktoré má pred číslicami 2 a 3 opäť číslicu 2, aby po jej vynásobení bolo na konci výsledku číslo 8 (viď tretí riadok a predpredposledný stĺpec násobenia), pretože jedine *1* (zvyšok, ktorý ostal po sčítaní predposledného stĺpca) +**8**+9+9 = *2*7.

Aby som dostala na konci výsledku číslo 7 777, musím vynásobiť číslo 1999 číslom, ktoré má pred číslicami 2, 2 a 3 číslicu 8, aby po jej vynásobení bolo na konci výsledku číslo 2 (viď štvrtý riadok a predpredpredposledný stĺpec násobenia), pretože jedine *2* (zvyšok, ktorý ostal po sčítaní predpredposledného stĺca) +**2**+9+9+5 = *2*7. A nakoniec aby som dostala na konci výsledku číslo 77 777, musím vynásobiť číslo 1999 číslom, ktoré má pred číslicami 2, 2, 3 a 8 číslicu 6, aby po jej vynásobení bolo na konci výsledku číslo 4 (viď piaty riadok, predpredpredpredposledný stĺpec násobenia), pretože jedine *2* (zvyšok, ktorý ostal po sčítaní predpredpredposledného stĺca) +**4**+9+9+3 = *2***7**.

Odtiaľ teda vyplýva, že ***najmenšie číslo***, ktorým musím vynásobiť číslo 1999 tak, aby bolo na konci výsledku päť sedmičiek, je číslo ***68 223***.

Poznámka pre tých, ktorí uvažovali, že *hľadané číslo nemusí byť PRIRODZENÉ*: zadanie sa dalo pochopiť aj takto, ale potom by ste naozaj museli nájsť to číslo presne. To znamená deliť až dovtedy (napríklad 77 777: 1999 = 38,90795398..), kým vám nevyjde zvyšok nula (to ale môže trvať pekne dlho). Inak ste to číslo nenašli presne a nevyjde vám skúška
(napríklad 38,907954 . 1999 = 77 777, 00005).

Príklad 12: (Jerry - Jaroslav Kadubec)

```
       1999
.   2666889
-----------
      17991
     15992
    15992
   11994
  11994
 11994
3998
-----------
5331111111
```

Hľadané číslo sa dá napísať ako 10X + Y. Kde Y vyjadruje cifru na mieste jednotiek a X je zvyšok čísla. Potom 1999 . (10X + Y) = 1999 . 10X + 1999Y. Číslo 1999 . 10X je deliteľné desiatimi a teda má na mieste jednotiek 0. 1999Y (kde Y je jednociferné číslo) má na mieste jednotiek cifru 9.Y (násobenie jednociferným číslom). Teda posledná cifra závisí len od Y a nie od X. V našom príklade je teda Y = 9. Podobne možno postupovať k „vyšším cifrám“.
Cifry volíme najmenšie možné a násobíme len dovtedy, pokiaľ už vo výsledku nie je 7 jedničiek. Tým máme zaručené, že sme našli najmenšie prirodzené číslo, ktoré splňuje zadanie príkladu. Hľadaným číslom je 2 666 889