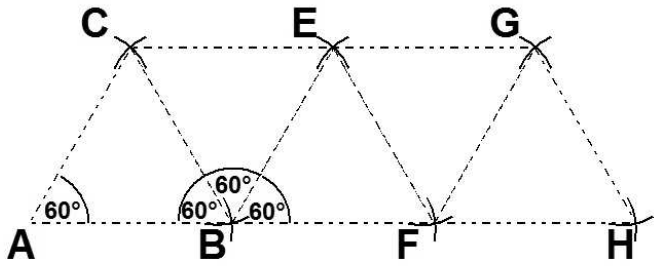
Úloha M5: Kevinova úloha. *Opravovala Zuzana „Bum“ Bogárová.*

Na papieri máme dva body A a B, ktoré sú vzdialené 5cm. K dispozícii máme len kružidlo a tieto dva body. Určite prvá vec, ktorá vám napadne, je, že pomocou kružidla predsa viem robiť trojuholníky! Do kružidla naberiem vzdialenosť 5cm, najskôr ho zapichnem do bodu A a opíšem kružnicu, a potom ho zapichnem do bodu B a opíšem kružnicu. Tam, kde sa tieto kružnice pretnú, dostanem dva body C a D. Ak by som mala teraz pravítko a spojila by som body A, B a C, dostanem rovnostranný trojuholník. To isté platí aj pre body A, B a D.



Na obrázku si nakreslím iba body A, B a C. Stranu BC použijem ako základňu pre ďalší rovnostranný trojuholník s vrcholom E. Potom stranu BE použijem ako základňu pre trojuholník BEF. Takto zostrojím ešte trojuholníky EFG a FGH tak, ako to vidíme na obrázku.

Väčšina z vás tu skončila, že A a H sú od seba vzdialené 15cm, lebo jedna strana trojuholníka je dlhá 5cm. Čo je pravda a bolo to správne riešenie. Samozrejme, že správnych riešení je viac. Mohli sme robiť trojuholníky na druhú stranu, hore, dole alebo do viac smerov. Na čo ale treba vždy myslieť pri podobných príkladoch je, že musíme dokázať, čo sme narysovali. Tento raz je to, že body A a H, aj s bodmi B a F ležia na jednej priamke. Tak začneme. Poznáme vlastnosť rovnostranného trojuholníka, že uhol pri každom vrchole je rovnaký, a to 60°. Keď si všimneme bod B, vidíme, že sa v ňom stretávajú tri trojuholníky. Keďže vieme, že uhol pri jednom vrchole je 60°, keď tam sú tri, tak to je 3·60°=180°. Toto isté je aj pri bode F. Ak pri bode B a aj F je uhol 180°, vieme, že body A, B, F, H ležia na jednej priamke.

Bodovanie:
správny výsledok – 2b.;
nakreslenie zrozumiteľného obrázku – 1b.;
vysvetlenie – 2b.

p-mat

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

APVV

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09

Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

31. ročník www.pikomat.sk školský rok 2013/2014

Vzorové riešenia 1. série, kategória 5–7

Úloha M1: Zmenšenie. *Opravoval Jakub Xaver Gubáš.*

Hľadané trojciferné číslo si zapíšeme ako ANB. Vynechaním prostrednej cifry teda dostaneme číslo AB. Zo zadania vieme, že ANB = 9·AB. Keď k obom stranám rovnice pripočítame AB, dostaneme, že ANB + AB = 10·AB, čo vieme zapísať ako trojciferné číslo AB0. Takto to znázorníme:

$$\begin{array}{r} A\ N\ B \\ A\ B \\ \hline A\ B\ 0 \end{array}$$

Z tohto vidíme, že súčet B+B musí končiť nulou. To sa dá dosiahnuť jedine ako 5+5 alebo ako 0+0. Vyskúšame najskôr 0+0:

$$\begin{array}{r} A\ N\ 0 \\ A\ 0 \\ \hline A\ 0\ 0 \end{array}$$

Toto riešením byť nemôže, pretože v tomto prípade by N aj A museli byť rovné 0, avšak 000 nepovažujeme za trojciferné číslo. Ako to bude, ak B=5?

$$\begin{array}{r} A\ N\ 5 \\ A\ 5 \\ \hline A\ 5\ 0 \end{array}$$

Z prvého sčitovania (5+5=10) si prenášame jednotku. Takže aby sme v druhom sčitovaní dostali cifru 5, musí byť súčet N+A rovný 4 alebo 14. Rýchlo si uvedomíme, že 14 nepripadá do úvahy, pretože by nám to pokazilo posledný krok. Pre A+N = 4 máme tieto štyri možnosti:

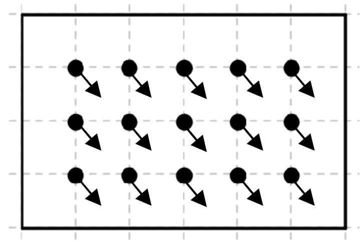
A=1 a N=3; A=2 a N=2; A=3 a N=1; A=4 a N=0.

Úloha má tieto **4 riešenia: 135, 225, 315 a 405**.

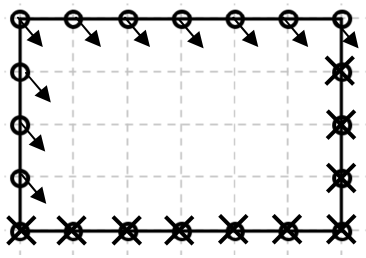
Bodovanie:
menej ako všetky správne riešenia – 0,5b.;
všetky správne riešenia – 1b.;
popis postupu podľa kvality – 0,5 až 4b.;
menšie chyby v riešení – mínus 0,5b.

Úloha M2: Podlaha. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

V tejto úlohe bolo treba prísť na to, ako súvisia počty priesečníkov na obvode a vnútri koberca (čísla *A* a *B*) s obsahom koberca – teda ako len z *A* a *B* vyrátať tento obsah.



Pokúsme sa spárovať priesečníky štvorčekovej siete (tzv. mrežové body) so štvorčekmi na koberci. Napríklad tak, že ku každému štvorčeku priradíme ten priesečník, ktorý je jeho ľavý horný roh.



Na prvom obrázku vidíme, že vnútorné priesečníky priradíme všetky. Na druhom obrázku vidíme, že z tých obvodových vieme priradiť asi polovicu – tie na hornom okraji áno, tie na dolnom okraji nie; a zo zvyšných potom tie na ľavom okraji áno a tie na pravom okraji nie. Jedinou výnimkou je pravý horný roh – ten nejde priradiť (šípočka od neho smeruje von z koberca), takže tento jeden odpočítame.

Rekapitulácia – prišli sme na to, že do obsahu obdĺžnika zarátame všetky priesečníky vnútri, polovicu tých na okraji, a ešte jeden odpočítame. A máme to:

$$S = B + \frac{A}{2} - 1$$

Bodovanie a komentár:

Niektorí z vás našli aj ďalšie spôsoby, ako túto úlohu vyriešiť, napríklad nejaké rovnice a pod. Ak ste svoje kroky dostatočne zdôvodnili, tak ktorýkoľvek dobrý postup bol ocenený piatimi bodmi. Ak niečo nebolo jasne vysvetlené, musel som body strhnúť. Pár riešiteľov riešilo túto úlohu tak, že povedali, že stačí nájsť všetky možné rozklady čísla B na súčin dvoch činiteľov a zistiť, pre ktorý z nich by sedel počet priesečníkov na okrajoch (A). Tento postup v podstate vedie k riešeniu, akurát nikto z vás nenapísal, ako nájdeme všetky možné dvojice čísel, ktoré dávajú súčin B. Pri niektorých špeciálnych číslach (ak je číslo B súčinom dvoch veľkých prvočísel) s tým majú problémy aj najlepšie počítače (na tom, že to nevedia ani počítače, sú dokonca založené veľmi silné šifry). Za takýto postup ste dostali väčšinou 2,5 – 3,5 boda, podľa zdôvodnenia.

Úloha M3: Smädná Mimi. *Opravoval Roman Kluvanec.*

Začnime úplne jednoducho a povedzme, že Mimi bude do najväčšej nádobky postupne prilievať po 3ml. Dostane tak množstvá **3ml, 6ml, 9ml, 12ml, 15ml, 18ml**.

Ako sa však dopracovať k množstvám, ktoré nie sú násobkom trojky? Nuž keby hneď na začiatku mala vo veľkej nádobe presne 1ml, vedela by týmto istým postupom dostať všetky množstvá o 1ml väčšie ako tie predošlé. 1ml si vie Mimi vytvoriť napríklad tak, že do 20ml nádoby najskôr naleje 9+9=18ml. Potom si napustí 3ml nádobu a doleje do najväčšej nádoby chýbajúce 2ml. Teraz si môže byť istá, že v najmenšej nádobe jej zostal 1ml. Najväčšiu nádobu vyprázdni a naleje do nej odložený 1ml. Hurá, teraz už len starým známym postupom (prilievaním po 3ml) dostane množstvá **1ml, 4ml, 7ml, 10ml, 13ml, 16ml, 19ml**.

Pre zvyšné množstvá má dve jednoduché možnosti. Buď si nejako vytvorí 2ml a zopakuje predošlý postup, alebo (ešte jednoduchšie) naleje 20ml nádobu doplna a bude z nej postupne odlievať po 3ml. Takto dostane **20ml, 17ml, 14ml, 11ml, 8ml, 5ml, 2ml**. **Mimi vie dostať všetky celočíselné hodnoty od 1 až po 20ml.**

Bodovanie:
násobky trojky – 1,5b.;
násobky trojky plus 1ml – 1,5b.;
násobky trojky plus 2ml – 2b.

Úloha M4: Nečakaní hostia. *Opravovala Lenka „Lenika“ Bendová.*

To, či bol kompliment pre Mimi pravdivý, závisí od toho, s ktorým z mravčekov sa Mimi rozprávala. Najspoľahlivejší spôsob, ako riešiť takúto úlohu, je prejsť si postupne všetky možnosti.

Ak by sa rozprávala s Albim, ktorý hovorí vždy pravdu, bol by kompliment pravdivý, avšak mravček by nemohol povedať vetu “Ja som Rado,” lebo by to nebola pravda. S Albim sa teda rozprávať nemohla.

Ak by sa rozprávala s Jojom, ktorý vždy klame, bol by kompliment nepravdivý a mravček by tiež klamal vo vete “Ja som Rado.” Mimi sa teda mohla rozprávať s Jojom, čo by znamenalo, že kompliment bol nepravdivý.

Ak by sa rozprávala s Radom, ktorý strieda pravdu a klamstvo, môžu nastať dve situácie: Buď najskôr povie pravdu a potom zaklame, alebo najskôr zaklame a potom povie pravdu. Keďže ale veta “Ja som Rado” je v tomto prípade pravdivá, musí to byť tá druhá situácia, v ktorej je kompliment nepravdivý. Mimi sa teda mohla rozprávať aj s Radom a kompliment by bol opäť nepravdivý.

Zo všetkých možností nám ostali dve – Mimi sa mohla rozprávať s Jojom alebo s Radom a v oboch prípadoch **kompliment, ktorý dostala, bol nepravdivý.**

Bodovanie:
správna odpoveď – 1b.;
popis postupu – 4b.