Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

31. ročník www.pikomat.sk školský rok 2013/2014

Vzorové riešenia 2. série, kategória 5–7

Úloha M1: Odrazy. *Opravovala Michaela „Miški“ Zatrochová.*

V tejto úlohe nebolo až tak náročné nájsť správnu odpoveď, problémom skôr bolo odôvodniť, prečo je práve to správna odpoveď. Najprv si to zhrňme. Mimi padala na ruky, na nohy, na hlavu a na zadok. Vieme, že ak od počtu odrazení hlavou (H) odpočítame 3, k počtu odrazení rukami (R) pripočítame 3, počet odrazení nohami (N) vynásobíme číslom 3 a počet odrazení zadkom (Z) vydelíme číslom 3, dostaneme vo všetkých prípadoch rovnaký výsledok:

$$H - 3 = X; \qquad R + 3 = X; \qquad N \cdot 3 = X; \qquad Z : 3 = X$$

Chceme zistiť, od ktorej časti tela sa Mimi odrazila najmenejkrát. Od spoločného výsledku (X) sa samozrejme k pôvodným počtom odrazení dopracujeme takto:

$$H = X + 3; \qquad R = X - 3; \qquad N = X : 3; \qquad Z = X \cdot 3$$

„Na štarte“ teda máme vždy číslo X a pýtame sa, kedy bude výsledok najmenší: Keď ho vynásobíme 3? Keď ho vydelíme 3? Keď k nemu pripočítame 3? Keď od neho odpočítame 3? Na prvý pohľad je jasné, že pripočítavanie aj násobenie môžeme vylúčiť – číslo X nám (na rozdiel od delenia a odpočítavania) zväčšujú, takže isto nie sú správnou cestou k čo najmenšiemu výsledku. Takže sme vylúčili odrazy hlavou a zadkom.

Zostali nám odrazenia rukami a nohami. Počet odrazení je určite celé číslo (predsa sa nedá odraziť 1,7-krát, všakže?). No a aby sme dostali celočíselný počet odrazení nohami, číslo X musí byť násobkom 3. Ďalšou dôležitou informáciou v zadaní bolo, že od každej časti tela sa Mimi odrazila aspoň raz. Keď sa teraz pozrieme na násobky trojky (3, 6, 9, 12, 15, atď.), vždy dostaneme po delení 3 menšie číslo ako po odčítaní 3. Jedinou výnimkou je číslo 3, pretože 3:3=1 a 3–3=0. Avšak my vieme, že Mimi sa musela v každom prípade odraziť aspoň raz, a preto možnosť 3–3=0 (nula odrazení rukami) neprichádza do úvahy.

Až teraz môžeme povedať, že **počet odrazení nohami bude vždy najmenší**.

Bodovanie:

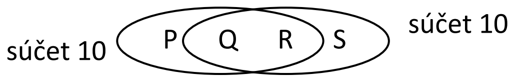
správna odpoveď – 1b.; správne riešenie, avšak iba na základe skúšania – 2b.; správne odôvodnenie – 2b.

Poznámka: Nebolo potrebné hľadať presný počet odrazení, pretože ten zistiť nevieme. Stačilo, ak ste zistili, že počet odrazení nohami bude vždy najmenší.

Úloha M2: Motýlica snov. *Opravoval Michal „Kesy“ Kesely*.

Zhrňme si všetky dôležité informácie o hľadanom desaťcifernom telefónnom čísle: **1)** Jeho prvá cifra je 0. **2)** Súčet každých troch po sebe idúcich cifier je 10. **3)** $BC \cdot A = AC$, kde A, B a C sú postupne ôsma až desiata cifra čísla a BC a AC značia dvojciferné čísla.

Súčet prvej trojice cifier (prvej, druhej a tretej cifry) je rovnaký ako súčet trojice posunutej o jedno miesto (teda druhej, tretej a štvrtej cifry). Tieto trojice majú druhú a tretiu cifru spoločnú, a preto aby mali rovnaký súčet, musí byť prvá cifra taká istá ako štvrtá cifra. Najlepšie je to vidieť na obrázku.



Podobne zistíme, že druhá cifra sa rovná piatej, tretia sa rovná šiestej, štvrtá siedmej a tak ďalej. Prišli sme na to, že **každá cifra sa rovná cifre o 3 miesta doľava aj o 3 miesta doprava**.

Pre nás to teda znamená, že prvá, štvrtá, siedma aj desiata cifra sú rovnaké. No a keďže prvá cifra je 0, musia byť nuly aj tie ostatné. Ďalej musia byť rovnaké cifry na druhom, piatom a ôsmom mieste. No a keďže ôsma cifra je A, musia byť A aj tie ostatné. Nakoniec, tretia cifra sa rovná šiestej a deviatej, no a keďže deviata cifra je B, musia byť B aj tie ostatné. Číslo teda má tvar **0 A B 0 A B 0 A B 0**.

Keďže desiata cifra je 0, podmienku zo zadania, že $BC \cdot A = AC$, môžeme prepísať na $B0 \cdot A = A0$. Obe strany môžeme vydeliť číslom 10 a dostaneme $B \cdot A = A$. Ľahko vidíme, že toto platí jedine v prípadoch, kedy $A = 0$ alebo $B = 1$.

Lenže ak by bolo $A = 0$, tak potom aby tri po sebe idúce cifry mali súčet 10, muselo by platiť $0+0+B = 10$. To je však problém, pretože B má byť iba jedna cifra. Preto túto možnosť vylúčime a ostáva nám jediná, a to že $\boldsymbol{B = 1}$.

Nuž a aby teda každé tri po sebe idúce cifry mali súčet 10, nemáme inú možnosť ako doplniť za A cifru 9. Takže $\boldsymbol{A = 9}$. Ešte skontrolujeme, či to spĺňa rovnicu $BC \cdot A = AC$, a hurá, naozaj platí $10 \cdot 9 = 90$.

Všetky neznáme cifry sme odhalili, a tak môžeme spokojne prehlásiť, že **číslo motýlice je 0910910910**.

Náš postup bol jednoznačný, ale nezaškodí si ešte potvrdiť, že toto číslo spĺňa všetky podmienky zo zadania – tak si to skús overiť. Prišli sme tak na jediné riešenie úlohy.

Bodovanie:

správny výsledok – 2b.; popis postupu – 3b.

Poznámka: Veľa z Vás začalo úlohu riešiť pomocou podmienky so súčinom a veľmi často ste sa v tom zamotali. A naopak, tí, ktorí úlohu začali riešiť od podmienky so súčtom, to mali väčšinou úplne správne. Niekedy je dobré najprv skúsiť k úlohe pristúpiť z rôznych strán či smerov a všimnúť si, odkiaľ sa rieši najľahšie. Bezhlavo chňapnúť po prvom postupe, ktorý Vám napadne, nemusí byť najlepší nápad.

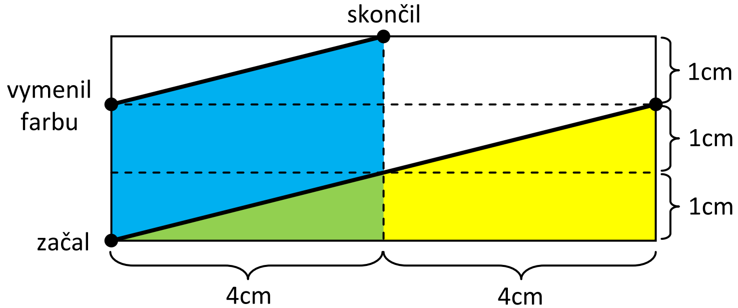
Úloha M3: Veža. *Opravoval Juraj „Juro“ Pavlovič.*

Tá časť povrchu valca, ktorá tvorí zvislé steny veže, sa nazýva *plášť*. Zvyšné dve kruhové časti povrchu valca sa nazývajú *podstavy*. Olip sa pohyboval a farbu vylieval iba po plášti, takže sa budeme venovať iba tomu. Aby sme si plášť mohli dobre znázorniť na papieri, predstavíme si, akoby sme ho „rozstrihli a rozrolovali“. Takto vznikne obdĺžnik, ktorého jeden rozmer bude rovnaký ako bola výška valca, a druhý rozmer bude rovnaký ako bol obvod podstavy valca – v našom prípade teda obdĺžnik 3×8 cm.

Najprv si ujasnime, kadiaľ Olip išiel. Vieme, že počas svojho rovnomerného stúpania na vežu stihol spraviť 1,5 otáčky okolo veže. Na našom obrázku spraviť jednu otáčku znamená prejsť celý obdĺžnik zľava doprava alebo sprava doľava. Polovica otáčky je znázornená zvislou prerušovanou čiarou. Keďže za 1,5 otáčky stihol vystúpať do výšky 3cm (výška veže), musel počas každej pol-otáčky vystúpať 1cm. Centimetrové výšky sú na obrázku vyznačené vodorovnými prerušovanými čiarami. Stačí už iba nakresliť rovnú čiaru (rovnú, pretože stúpal rovnomerne), ktorá za každú pol-otáčku vystúpa o 1cm – to je Olipova trasa po veži – viď obrázok.

Zo zadania vieme, že celú prvú otáčku – teda pokým sa ocitol presne nad miestom, z ktorého vyštartoval – vylieval Olip žltú farbu. Na obrázku to je celý veľký spodný trojuholník široký 8cm a vysoký 2cm. Keď potom začal poslednú pol-otáčku – na obrázku horná šikmá čiara – vylieval už modrú farbu. Keďže ale už putoval ponad úsek, ktorý predtým namaľoval nažlto, stekajúca modrá farba sa v tejto spodnej časti zmiešala so žltou a vytvorili zelenú. To na obrázku vidno ako malý trojuholník pri začiatku Olipovej trasy, široký 4cm a vysoký 1cm.

Ostáva už iba spočítať, ktorá farebná časť zaberá akú plochu. Tu nám prídu vhod práve tie prerušované čiary. Tieto rozdeľujú celý plášť na 6 obdĺžničkov, každý s rozmermi 4×1cm, a teda plochou 4cm^2. Okrem toho niektoré tieto obdĺžničky rozsekla Olipova trasa na polovice v tvare trojuholníkov, a tak je jasné, že tieto malé trojuholníky budú mať obsah 4/2=2cm^2. Teraz nám už stačí iba spočítať, z koľkých takýchto obdĺžničkov a trojuholníčkov sa skladajú jednotlivé farebné plochy:



ZELENÁ: ....1 malý trojuholníček......................**2cm^2**,
ŽLTÁ:.........................1 trojuholníček a 1 obdĺžnik ....2+4 = **6cm^2**,
MODRÁ:..................2 trojuholníčky a 1 obdĺžnik...........2·2 + 4 = **8cm^2**,
NEZAFARBENÁ: ....2 trojuholníčky a 1 obdĺžnik...........2·2 + 4 = **8cm^2**.

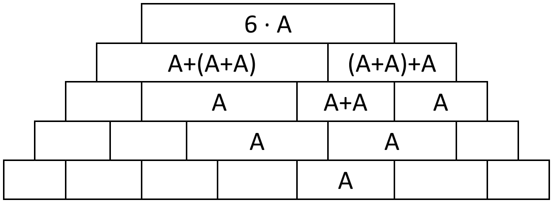
Niektorí z Vás udávali veľkosti plôch ako zlomky z celkovej plochy plášťa. To, samozrejme, je tiež správne riešenie. Celková plocha plášťa veže (obdĺžnika na obrázku) je $3 \cdot 8 = 24 cm^2$. Ľahučkými výpočtami prídeme na to, že **1/12 veže je zelná, 1/4 veže je žltá, 1/3 veže je modrá a 1/3 veže ostala nezafarbená šedá**.

Bodovanie:
veľkosti 4 farebných plôch v cm^2 alebo ako zlomok – $4 \cdot 0{,}5 = 2$b.; správne rozmiestnenie farieb – 2b.; vysvetlenie postupu – 1b.

Úloha M4: Schody. *Opravoval Jakub Xaver Gubáš.*

Našou úlohou je umiestniť čísla 1, 1, 2, 2, 3, 3 a 4 na najspodnejšie kamene „sčítacej pyramídy“ tak, aby na jej vrchole vyšlo najväčšie možné číslo. Je zrejmé, že poloha jednotlivých kameňov v najnižšom rade rozhoduje o tom, ako čísla na nich umiestnené prispejú k celkovému súčtu na vrchole.

Vyberme si jeden spodný kameň a poďme preskúmať, koľkokrát sa jeho číslo dostane na najvrchnejší kameň. Náhodne som zvolil napríklad 5. kameň zľava a na obrázku vidíme, čo sa bude diať, keď naň napíšeme číslo A. Toto číslo sa na najvrchnejší kameň „prepracuje“ až 6-krát.



Tento istý jednoduchý postup vieme zopakovať pre každý jeden zo spodných kameňov. Takto si teda zistíme, koľkokrát sa čísla zo spodných kameňov objavia vo výslednom súčte na vrchole. V danom poradí spodných kameňov to bude:

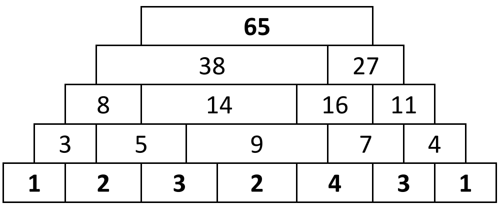
1× 3× 5× 3× 6× 4× 1×

Na záver je jasné, že ak chceme čo najväčší výsledok, tak na pozície, ktoré sa hore dostanú najviackrát, pridelíme najväčšie možné čísla. Preto spodný riadok bude vyzerať:

(1×)	(3×)	(5×)	(3×)	(6×)	(4×)	(1×)
1	**2**	**3**	**2**	**4**	**3**	**1**

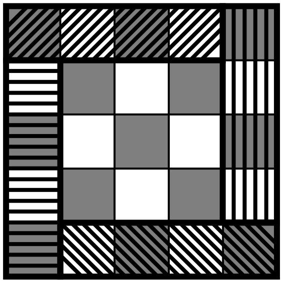
Vyplnenú pyramídu s najväčším možným číslom na vrchole – **65** – vidíme na obrázku.

Bodovanie:
súčet menší ako 61 – 0b.;
súčet 61 – 1b.;
súčet 63 alebo 64 bez vysvetlenia – 2b.;
súčet 63 alebo 64 s vysvetlením – 3 až 4b.;
správny výsledok (súčet 65) s nie úplne korektným postupom – 4,5b.



Úloha M5: Bosseho miestnosť. *Opravovala Petra „Peťa“ Vlachynská.*

Hoci v zadaní sme to zabudli upresniť, v tejto úlohe treba predpokladať, že šachovnica je štvorcová – našťastie ste to ale všetci tak riešili, takže nevznikol problém. Vieme, že Kevin a Mimi pri obchádzaní miestnosti stúpili na 148 čiernych dlaždíc. Ak by sme vedeli zistiť celkový počet obvodových dlaždíc (čiernych aj bielych), budeme z neho vedieť určiť rozmery miestnosti.



Ako z počtu všetkých obvodových dlaždíc určíme rozmery miestnosti? Tu sa nesmieme nechať zmiasť a myslieť si, že „to predsa stačí vydeliť 4, lebo štvorec má 4 rovnaké strany“. Pozor! Na obrázku vidíme, čo dostaneme, keď všetky obvodové dlaždice rozdelíme na 4 rovnaké časti (na obrázku rôzne vyšrafované). Takže si treba pamätať, že keď počet obvodových dlaždíc vydelíme 4, dostaneme počet dlaždíc **o 1 menší**, ako je strana štvorca.

Z toho istého obrázku je zrejmá ešte jedna vec: Keďže sa obvodové dlaždice vždy dajú rozdeliť na 4 rovnaké časti, znamená to, že ich počet je určite párny. Prečo je to pre nás zaujímavé? Lebo dlaždice sa po obvode stále striedajú biela-čierna-biela-čierna... A ak vieme, že je ich párny počet, môžeme si byť istí, že medzi nimi bude rovnako veľa čiernych aj bielych dlaždíc.

Takže ak Mimi a Kevin stúpili na 148 čiernych dlaždíc, museli určite stúpiť aj na rovnaký počet bielych. Teda spolu stúpili na $148 \cdot 2 = 296$ dlaždíc. Tento počet už iba vydelíme štyrma, $296:4 = 74$, NEZABUDNEME pripočítať 1, ako sme si ukázali v druhom odseku a tiež na obrázku, a hurá! **Rozmery Šachovnicovej miestnosti sú 75×75 dlaždíc.**

Bodovanie:
výsledok – 2b.; postup – 3b.; chýbajúci dôvod, prečo je na obvode rovnako veľa bielych a čiernych – mínus 0,3b.; predpoklad, že rohy šachovnice sú vždy čierne – mínus 0,3b.

Poznámka: Veľa z Vás predpokladalo, že pri nepárnom počte dlaždíc na strane musia byť všetky rohy šachovnice čierne. Je to tak síce na obrázku v zadaní, no tento obrázok slúžil iba ako príklad a nejaká iná šachovnica pokojne mohla mať farby naopak. Výsledok to nemení, no pre úplnosť riešenia je potrebné to spomenúť. Podobne na tom bolo aj tvrdenie, že počet bielych a čiernych dlaždíc na obvode je rovnaký. Väčšina z Vás na to prišla, no skoro nikto neuviedol dôvod.

A na záver zaujímavá otázka: Ako by sa riešenie úlohy zmenilo, keby šachovnica mohla byť aj obdĺžniková?