Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

31. ročník www.pikomat.sk školský rok 2013/2014

Vzorové riešenia 3. série, kategória 5–7

Úloha M1: Čokoláda. *Opravovala Zuzana „Zuzka" Rendlová.*

Keďže Kevinovi chýbal jeden jediný cent, ale aj tak mu spojenie peňazí s Mimi nepomohlo, znamená to, že Mimi nevedela poskytnúť ani ten 1 cent. Takže je jasné, že Mimi nemala vôbec žiadne peniaze. No a keďže jej na kúpu čokolády chýbalo 7 centov, čokoláda musela stáť presne toľko. Tým pádom tiež vieme, že Kevin mal 6 centov.

Bodovanie:
správny výsledok – 3b.; postup náhodným skúšaním – 1b.; zdôvodnenie, prečo čokoláda nemohla stáť viac ako 7 centov – 1b.;

Poznámka:
Niektorí z Vás sa pustili do hľadania správneho riešenia pomocou skúšania rôznych možností. Tento postup je tiež správny, len pri ňom treba odôvodniť, prečo je nájdené riešenie jediné. Najskôr si treba uvedomiť, že čokoláda nemohla stáť menej ako 7 centov preto, lebo Mimi chýbalo práve 7 centov, aby si ju mohla kúpiť. A prečo nemohla stáť 8 alebo viac centov? Pretože v týchto prípadoch by Mimi musela mať 1 alebo viac centov. Tým pádom by určite vedela doložiť Kevinovi ten 1 cent, ktorý mu chýbal, a spoločne by si čokoládu mohli kúpiť.

Úloha M2: Zlomyseľná studňa. *Opravoval Juraj „Juro" Pavlovič.*

Musíme sa ospravedlniť za neúplnú formuláciu zadania. V prvom rade nebolo celkom jasné, kedy presne je ten moment, keď človek „skončí s hádzaním". Niektorí ste to brali tak, že po poslednom vhodení studňa človeku najprv vydá určenú sumu, a až potom kontroluje deliteľnosť štyrmi. Niektorí ste to brali tak, že studňa hneď po vhodení skontroluje deliteľnosť a podľa toho sa rozhodne, či človeku vydá určenú sumu, alebo nie. Akceptoval som obe tieto pochopenia.

V druhom rade v zadaní nebolo vôbec uvedené, čo sa bude diať v prípade, že studňa už nemá na dne dostatok peňazí na to, aby podľa daných pravidiel vyplatila človeka, ktorý do nej ešte čosi vhodil. Aj tu som preto akceptoval všetky rozumné predpoklady.

Prvé pochopenie – ak studňa hneď vydáva peniaze. V tomto prípade sa bolo treba pozrieť na to, koľko centov *ubudne z dna* po každej výmene. Ak vhodíme 12 a vyberieme 18, z dna **ubudne 6 centov**. Ak vhodíme 5 a vyberieme 13, z dna **ubudne 8 centov**. Ak vhodíme 3 a vyberieme 17, z dna **ubudne 14 centov**. Vidíme, že všetky zmeny, ktoré na dne môžu nastať, sú párne. Na začiatku bola na dne suma nepárna – 127 centov. Keď od nepárneho čísla odčitujeme stále iba párne čísla, výsledok ostane stále nepárnym. No a nepárne číslo samozrejme nikdy nemôže byť deliteľné štyrmi. Takže pri tomto pochopení **neexistuje postup, ako dosiahnuť na dne studne sumu deliteľnú štyrmi**.

Druhé pochopenie – ak studňa kontroluje deliteľnosť hneď po vhodení. V tomto prípade ako prvý krok pripadá do úvahy jedine vhodenie 5 centov. Ak by sme vhodili 12, na dne bude 127+12 = 139, čo nie je deliteľné 4. Ak by sme vhodili 3, na dne bude 127+3 = 130, čo tiež nie je deliteľné 4. Ak ale vhodíme 5, na dne bude 132 centov, čo je deliteľné 4, a teda studňa nás nezmáča a poslušne nám vydá 13 centov. Potom jej na dne ostane 132-13 = 119 centov a situácia sa opakuje. Takto **vieme opakovaným vhadzovaním 5 centov zo studne vybrať skoro všetky peniaze**, až v nej nakoniec ostane iba 7 centov.

Bodovanie:
za akékoľvek pochopenie úlohy, ktoré nebolo v rozpore so zadaním, sa dalo získať 5b.; všetky strhnutia bodov sú vysvetlené priamo v riešeniach.

Úloha M3: Kolobežka. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Prejdená vzdialenosť pribúda rovnako na oboch displejoch. Keď prejdeme 1 meter, obidva displeje zvýšia svoju hodnotu o 1. Rozdiel hodnôt na displejoch je teda po celý čas rovnaký, a to 12345,6 – 123,4 = 12222,2. Poďme sledovať, čo sa deje s jednotlivými vzdialenosťami. Červený displej nazveme „Č“ a modrý nazveme „M“.

Keď prejdeme vzdialenosť 0,1, dostaneme Č = 12345,7 a M = 123,5. Keď prejdeme vzdialenosť 1, dostaneme Č = 12346,6, M = 124,4. Čo sa deje? Číslo M stúpa rýchlejšie než prvé 4 cifry čísla Č. Môžeme sa na kolobežke odrážať koľko chceme, M je čoraz vzdialenejšie od pomerne lenivo stúpajúcich prvých 4 cifier Č. Úloha už-už vyzerá, že nebude mať riešenie, no vtom sa na modrom displeji zjaví vzdialenosť 1000,0. Pre úplnosť dodáme, že v tejto chvíli je Č = 13222,2. Pozeráme na displeje a s údivom si uvedomíme, že M je teraz menšie než prvých 5 cifier Č. Áno, teraz už pozeráme na prvých 5 cifier, lebo M je zrazu 5-ciferné. Opäť teda skúsime prejsť nejakú vzdialenosť a pozrieme sa, čo sa deje na displejoch.

Keď prejdeme 0,1, máme Č = 13222,3, M = 1000,1.

Keď prejdeme 1, máme Č = 13223,2, M = 1001,0.

Stále teda platí, že M stúpa rýchlejšie než prvých 5 cifier Č. To nás teší, lebo máme šancu tento červený displej „dobehnúť“.

Červený	Modrý	Prešli sme teraz	Prešli sme dokopy
12345,6	123,4	0	0
13222,2	1000,0	876,6	876,6
13522,2	1300,0	300	1176,6
13572,2	1350,0	50	1226,6
13579,2	1357,0	7	1233,6
13580,1 ??	1357,9	0,9	1234,5
13580,2	1358,0	0,1	1234,6

Na prvých miestach sa nám cifry zhodujú (je tam 1). Poďme zladiť cifry na 2. mieste. Mohlo by tam byť číslo 3 tak, ako je v Č. To znamená, že sa prejdeme 300 metrov dopredu, čo bude mať nasledovný efekt: Č = 13522,2, M = 1300,0. Už sa nám displeje zhodujú na prvých 2 miestach (13). Obdobným spôsobom dolaďujeme ďalej, čo najlepšie vidno v tabuľke, vyplnenej pekne od začiatku.

Vidíme, že v 6. kroku sa Č nečakane zmenilo, lebo došlo ku prenosu cez 10. Toto nás však neodradí, a tak doladíme posledné 2 cifry M a dostávame sa k výsledku. **Na červenom displeji svieti 13580,2, na modrom 1358,0. Dokopy sme prešli 1234,6 metrov.**

Bodovanie:
správny výsledok a postup – 5b.; slabší alebo menej jasný postup – 3 až 4,5b.; stávalo sa totiž, že ste mali dobrý nápad a pomerne slušný postup, ale na konci Vám ušiel nejaký detail, nevyšiel výpočet, alebo Vás zaskočil prenos cez 10 v 6. kroku; výsledok bez postupu – 2b.; zle pochopené zadanie (ale dobré nápady pri postupe) – 0,5 až 1b.

Úloha M4: Klebetenie. *Opravovala Veronika „Nika“ Jankovičová.*

Zhrňme si tri dôležité informácie zo zadania: 1) Opice doniesli naspäť 33 melónov. 2) Každá opica ukradla rovnaký počet melónov. 3) Každá po každej hodila práve 1 melón.

Keďže všetky opice sa správali úplne rovnako, je jasné, že každá musela doniesť rovnaký počet melónov. Dokopy doniesli 33, a preto počet opíc musel byť deliteľom čísla 33. Sú iba 4 možnosti: 1 opica doniesla 33 melónov; 3 opice doniesli každá 11 melónov; 11 opíc donieslo každá 3 melóny; 33 opíc donieslo každá 1 melón.

V zadaní sme sa pýtali, koľko **najviac** melónov mohli opice ukradnúť. Pozrime sa na jednotlivé prípady.

Ak by bola opica len jedna, nemala by po kom hádzať melóny, a tak by doniesla úplne všetky, ktoré ukradla. **Jedna opica by ukradla 33 melónov**.

Ak by išli kradnúť 3 opice, každá z nich by pri vzájomnom ohadzovaní prišla o 2 melóny (po každej „kolegyni“ by hodila jeden). Keďže naspäť každá opica priniesla 11 melónov, musela každá ukradnúť 11+2 = 13 melónov. Dokopy teda **3 opice by ukradli 3×13 = 39 melónov**.

Keby Bosse poslal 11 opíc, pri ohadzovaní by každá stratila 10 melónov (opäť jeden hodený po každej „kolegyni“). Naspäť každá priniesla 3 melóny, takže ukradnutých musela mať pôvodne 3+10 = 13 melónov. Dokopy teda **11 opíc by ukradlo 11×13 = 143 melónov**.

Ak by však šlo 33 opíc, pri ohadzovaní by každá stratila až 32 melónov. Takže aby mohla Bossemu doniesť 1 melón, musela pôvodne mať ukradnutých až 1+32 = 33 melónov. Dokopy teda **33 opíc by ukradlo 33×33 = 1089 melónov**.

Odpoveď: **Opice mohli ukradnúť najviac 1089 melónov.** Chudák pán Kverkjo...

Bodovanie:
popis postupu – 3b.; výpočet – 2b.; strhnutia bodov som odôvodnila priamo v riešeniach.

Úloha M5: Radcovia. *Opravovala Dominika „Domča“ Iždinská.*

Keďže počet radcov je párne číslo medzi 21 a 29, do úvahy prichádzajú iba počty: 22, 24, 26 a 28. Každý z radcov tvrdí, že sedí medzi dvoma radcami rozdielneho typu. Ak ale toto tvrdenie vyslovil klamár, znamená to, že v skutočnosti sedí medzi dvoma radcami rovnakého typu.

Klamár teda môže sedieť buď medzi dvoma klamármi (K-**K**-K), alebo medzi dvoma pravdovravnými (P-**K**-P). Lenže ak by niekde sedel klamár medzi dvoma klamármi, potom by už museli klamári sedieť úplne všade. To ale nevyhovuje podmienke zadania, že pri stole sa nachádza *aspoň 1 radca každého typu.* Klamár teda *vždy* sedí medzi dvoma pravdovravnými.

Takže určite niekde pri stole bude situácia: **P**-K-**P**. Pozrime teraz na tých dvoch pravdovravných. Tí musia mať z druhej strany vedľa seba niekoho pravdovravného, aby sa splnilo ich (pravdivé) tvrdenie. Takže to znamená: **P**-P-K-P-**P**. Opäť máme „na kraji“ pravdovravných, tentoraz ale každý z nich už má jedného pravdovravného suseda. Preto ďalší v poradí na každej strane musia byť klamári: **K**-P-P-K-P-P-**K**. Takýmto spôsobom vieme rad ďalej rozširovať:

...-K-P-P-K-P-P-K-P-P-**K**-P-P-K-P-P-K-P-P-K-...

Ako vidíme, postupnosť sa opakuje po 3 radcoch. Aby sa tento rad vedel „uzavrieť“ okolo okrúhleho stola, počet radcov musí byť teda číslo deliteľné 3. Z našich možností ako jediné vyhovuje číslo 24. Z toho sú 2/3 pravdovravných a 1/3 klamárov. **Pravdovravných radcov je 16 a klamárskych 8.**

Bodovanie:
správne riešenie – 5b.; za zle pochopené zadanie – max. 2,5b.; body som strhávala za nesprávne úvahy alebo nedostatočné vysvetlenie.

Poznámka:
Najčastejšie nesprávne pochopenia zadania boli: že obaja radcovia musia byť iní ako radca v strede medzi nimi; alebo neuváženie toho, že klamári klamú, a teda ich tvrdenie treba prevrátiť naopak.

p-mat

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat