Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

31. ročník www.pikomat.sk školský rok 2013/2014

Vzorové riešenia 4. série, kategória 5–7

Úloha M1: Kocky. *Opravovala Barbora „Anabelka“ Chabanová.*

Vieme, že Mimi, Kevin a Chipa spolu vyzbierali presne 70 kociek. My chceme zistiť, koľko kociek bolo pôvodne rozsypaných na zemi. Pre začiatok si predstavme ideálny prípad, že počet rozsypaných kociek je deliteľný 4. Ako prvá zbierala Mimi a vieme, že zodvihla každú štvrtú kocku, čiže $\frac{1}{4}$ všetkých kociek. Na zemi tým pádom ostali $\frac{3}{4}$ všetkých kociek. Z tých následne Kevin vyzbieral každú piatu, čiže zodvihol $\frac{1}{5}$ z $\frac{3}{4}$ všetkých kociek, a to sú $\frac{3}{20}$ všetkých kociek. Na zemi potom z celkového počtu kociek ostali $\frac{3}{4}-\frac{3}{20}=\frac{15-3}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$ všetkých kociek. Z týchto zvyšných kociek potom ešte Chipa vyzbierala každú tretiu, teda $\frac{1}{3}$ z $\frac{3}{5}$ všetkých kociek, čo je $\frac{1}{5}$ všetkých kociek. Na zemi nám nakoniec zostali $\frac{2}{5}$ z celkového počtu kociek a deti tým pádom museli dokopy vyzbierať $\frac{3}{5}$ z celkového počtu kociek. Toto si môžeme overiť aj tak, že spočítame dokopy zlomky, ktoré vyzbierali jednotlivé deti: $\frac{1}{4}+\frac{3}{20}+\frac{1}{5}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$. Hurá, vyšlo to isté.

Ak teda 70 kociek predstavuje $\frac{3}{5}$ z celkového počtu, tak potom celkový počet kociek musel byť 70·5/3 = 116,666 kociek. Vyšlo nám desatinné číslo. Ako je to možné? Je to preto, lebo na začiatku sme predpokladali, že počet rozsypaných kociek bol deliteľný 4. Keďže nám teraz vyšlo desatinné číslo, znamená to, že tento náš predpoklad bol nesprávny. To ale nevadí, lebo aj tak sme zistili aspoň to, že kociek muselo byť minimálne 117. Poďme teda vyskúšať túto možnosť.

117 : 4 = 29 a zvyšok 1. Takže Mimi zodvihla 29 kociek, ostalo ich 117 – 29 = 88.
88 : 5 = 17 a zvyšok 3. Takže Kevin zodvihol 17 kociek, ostalo ich 88 – 17 = 71.
71 : 3 = 23 a zvyšok 2. Takže Chipa zodvihla 23 kociek.

V tomto prípade deti dokopy vyzbierali 29 + 17 + 23 = 69 kociek. Do 70-tich ešte stále chýba jedna kocka. To je spôsobené práve tým, že počet kociek na začiatku nie je deliteľný 4, a tak Mima nemohla vyzbierať presne $\frac{1}{4}$ kociek, ale v skutočnosti iba o trochu menej.

Skúsme teda možnosť, keď by na zemi bolo 118 kociek. Rovnakým postupom ako pri prípade 117 prídeme na to, že Mimi zodvihla 29, Kevin 17 a Chipa 24 kociek. To je spolu 29 + 17 + 24 = 70 kociek. Super, našli sme jedno riešenie!

Ostáva nám dokázať, že je jediné. Overíme preto ešte prípad 119 kociek a opäť tým istým postupom prídeme na to, že Mima zodvihla 29, Kevin 18 a Chipa 24 kociek. To je spolu 29 + 18 + 24 = 71 kociek, a to už je priveľa. Takže ďalšími vyššími počtami kociek sa už nemusíme zaoberať. **Na zemi bolo pôvodne rozsypaných 118 kociek.**

Bodovanie:
správny výsledok – 2b.;
dôkaz, že riešenie je jediné – 0,5b.;
vysvetlenie postupu – 2,5b.

Úloha M2: Ženy na trhu. *Opravovala Kristína „Krisa" Faguľová.*

Máme závažia 1 g, 4 g, 7 g, … 199 g. Koľko ich vlastne je? Na chvíľu si predstavme, že každé závažie je o 2 gramy ťažšie, teda že majú hmotnosti 3 g, 6 g, 9 g, … 201 g. Keďže závažia sú teraz po sebe idúce násobky trojky, ich počet určíme jednoducho ako 201 : 3 = 67.

Keď už vieme, koľko je závaží, zaujíma nás ešte, ktoré dve závažia majú spolu presne 200 g. Po krátkom zamyslení je nám jasné, že to musia byť dvojice: 1+199, 4+196, 7+193, 10+190, … a tak ďalej až po poslednú dvojicu 97+103 gramov. To je dokopy 33 dvojíc a ešte nám zostalo závažie 100 g, ktoré do žiadnej dvojice nepatrí.

Teraz poďme náhodne vyberať závažia. Ak by sme mali šťastie, možno by hneď prvé dve závažia mali spolu 200 g. Avšak ak si niečím chceme byť *naozaj istí*, tak sa nemôžeme spoliehať na šťastie. Takže čo ak šťastie mať nebudeme? Môže sa stať, že vytiahneme 33 závaží, z každej dvojice práve jedno, k tomu ešte závažie 100 g. To je 34 závaží a stále medzi nimi nebudú žiadne dve so súčtom 200 g. Ak však vytiahneme ešte jedno závažie, môžeme si byť *istí*, že medzi nimi *určite* bude dvojica závaží, ktoré majú spolu 200 g. Musíme teda vytiahnuť 34+1 = **35 závaží**.

Bodovanie:
určenie počtu závaží – 1,5b.;
určenie dvojíc, ktorých súčet je 200 g – 1b.;
uvedomenie si, že 100 g závažie nemá dvojicu – 0,5b.;
vysvetlenie – 2b.

Úloha M3: Nahnevaný šéfkuchár. *Opravovala Kristína „Kika“ Prešinská.*

Na úvod si zopakujme a očíslujme tvrdenia zo zadania:
(1) Aspoň jeden zo syrov bryndza a eidam nie je pokazený.
(2) Práve jeden z dvojice syrov parenica, oštiepok nie je pokazený.
(3) Parenica a eidam sú buď obidva pokazené, alebo obidva dobré.
(4) Práve jeden z dvojice syrov eidam a korbáčiky nie je pokazený.
(5) Najviac jeden z dvojice bryndza, oštiepok je pokazený.

Ak nevieme, kde začať, tak si jednoducho vyberieme ktorýkoľvek syr a rozoberieme oba prípady – keď je a keď nie je pokazený. Zakaždým pomocou tvrdení zo zadania určíme stav ostatných syrov. V tvrdeniach sa najčastejšie vyskytuje syr eidam, tak začnime tým:

1. Ak je eidam pokazený. Podľa tvrdenia (1) musí byť bryndza dobrá a podľa tvrdenia (3) musí byť parenica pokazená. Podľa tvrdenia (4) musia byť korbáčiky dobré. Keďže už vieme, že parenica je pokazená, tak podľa tvrdenia (2) musí byť oštiepok dobrý. Syry máme všetky určené, no ani raz sme nepoužili tvrdenie (5), a tak musíme ešte overiť jeho platnosť. Aj tvrdenie (5) je splnené, a teda takéto rozdelenie syrov mohlo nastať.

2. Keď je eidam dobrý. Podľa tvrdenia (3) je parenica dobrá a podľa tvrdenia (4) sú korbáčiky pokazené. Keďže už vieme, že parenica je dobrá, tak podľa tvrdenia (2) musí byť oštiepok pokazený. Keďže je oštiepok pokazený, tak podľa tvrdenia (5) musí byť bryndza dobrá. Tentokrát sme nepoužili tvrdenie (1), a tak ešte musíme overiť jeho platnosť. Aj tvrdenie (1) je splnené, a teda sme našli ďalšie možné rozdelenie syrov.

Jediný syr, ktorý je dobrý v oboch prípadoch, je bryndza, takže odpoveď na otzáku zo zadania znie: **určite nebola pokazená bryndza.**

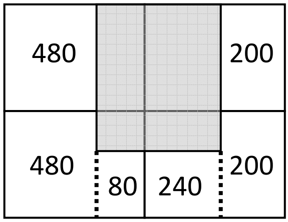
Keďže sme pre eidam vyčerpali všetky (obidve) možnosti – „pokazený“ aj „dobrý“ – a všetky ostatné syry sme určili podľa jednoznačných krokov, tak je toto jediným riešením. Ale ak chceš, skús spraviť skúšku správnosti a predpokladať, že bryndza je pokazená – ak sa nepomýliš, určite narazíš na nejaký nemôžný stav.

Bodovanie:
nápad určiť si náhodne jeden začiatočný syr a podľa neho odvodzovať ostatné – 1b.;
správne vyriešená jedna možnosť – 2b.;
správne vyriešená ďalšia možnosť – 1,5b.;
určenie správneho riešenia na základe týchto dvoch možností – 0,5b.

Úloha M4: Bosseho problém. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

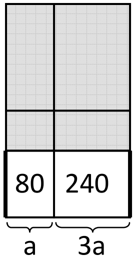
Viacerí z Vás použili pri riešení tejto úlohy nejaké rovnice, a tu si ukážeme postup, ktorý ich vysvetľuje.

Dôležitá informácia je, že 4 obdĺžnikové pozemky sú rovnako veľké. Keď si do nich dokreslíme dve čiary (na Obr. 1 bodkované), rozdelíme si takto oba dolné pozemky na dve časti. V oboch tak vzniknú plochy, ktoré sú rovnako veľké ako nezastavané plochy na pozemkoch nad nimi – 480 m^2 a 200 m^2. Ďalej dopočítame malé plochy pod vežou: na ľavom pozemku je podľa zadania nezastavaných dokopy 560 m^2, takže ku 480 m^2 ešte chýba 80 m^2, na pravom má byť dokopy nezastavaných 440 m^2, takže chýba 240 m^2. Zistené veľkosti plôch vidíme na Obr. 1.



Obr. 1

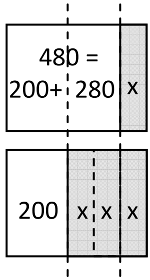
Teraz sa pozrime na dve malé plochy pod vežou. Majú 80 m^2 a 240 m^2, teda jedna je trikrát väčšia ako druhá a jeden rozmer majú rovnaký. Z toho vyplýva, že tá väčšia plocha musí byť 3-krát širšia ako tá menšia (Obr. 2). Táto informácia o šírkach je pre nás dôležitá, pretože v takom pomere sú aj šírky častí veže nad tým.



Obr. 2

Teraz si porovnajme dva horné pozemky. Podľa zadania sú rovnako veľké. Ten ľavý sa skladá z plochy 480 m^2 a kusu veže, ten pravý sa skladá z plochy 200 m^2 a <u>trikrát väčšieho</u> kusu veže.

Keď si ich porovnáme ako na Obr. 3, vidíme, že dva kúsky (2x) veže zodpovedajú ploche 280 m^2. Takže jeden kúsok $\boldsymbol{x}$ **= 140 m^2**. Presvedčíme sa, či to sedí – ľavý horný pozemok má $480 + x = 480 + 140 = 620$ m^2, pravý horný má $200 + 3x = 200 + 3 \cdot 140 = 620$ m^2. Vychádza nám, že sú rovnaké, výborne. Obsah plochy, ktorú zaberie celá veža, už dopočítame ľahko, napríklad tak, že zrátame obsah všetkých 4 pozemkov a odrátame nezastavané časti: $4 \cdot 620 - 480 - 560 - 200 - 440 =$ **800 m^2**.



Obr. 3

<u>Bodovanie</u>:

Vyskytlo sa viac dobrých postupov, podstatné bolo, aby ste zdôvodnili svoje kroky pri určovaní jednotlivých častí. Za drobné nepresnosti som strhával najviac bod.

<u>Poznámka</u>:

Bohužiaľ, vyskytlo sa viacero riešiteľov, ktorí si z náčrtu v zadaní vyvodili veci, ktoré neboli pravdivé. Obrázky v zadaní sú len náčrty, plány, schémy... Ak sa napríklad zdá, že v pravom hornom pozemku zaberá veža polovicu plochy, tak to vôbec nemusí byť pravda (pokiaľ to nie je napísané v zadaní). Čo v zadaní je, je to, že pozemky aj veža sú obdĺžniky, pozemky sú rovnako veľké a v obrázku sú zaznačené obsahy nezastavaných plôch. Ak by boli na pláne niektoré strany označené rovnakým písmenkom, tak by ste ich mohli považovať za rovnaké. Inak je to len náčrt. Veď predsa ak na pozemku vpravo hore je nezastavaných 200 m^2 a bola by to polovica, tak by ten pozemok dokopy mal menšiu plochu ako ostatné, čo je v jasnom rozpore so zadaním. Už na tomto rozpore sa dalo postrehnúť, že to tak nie je.

Úloha M5: Večerná práca. *Opravovala Irena „Enka“ Bačinská.*

Počas večera stihla rodinka ozdobiť 5 tácok, pričom na každú dal Kevin 12 perníkov. Teda dokopy ozdobili $12 \cdot 5 = 60$ perníkov. Kým Mimi ozdobila 5 perníkov, tak mama ozdobila 3 perníky, čiže za rovnaký čas ozdobili $5+3 = 8$ perníkov. Keďže Mimi a mama skončili zdobenie naraz, je jasné, že počet perníkov, ktoré ony dve dokopy ozdobili, musí byť násobkom 8 (inak by nemohli skončiť naraz, lebo vždy keď mama dokončila svoj 1. alebo 2. perník, tak Mimi mala rozrobený svoj 2. alebo 3. perník).

Násobky 8 menšie ako 60 sú: 56, 48, 40, 32, ...

Ak Mimi s mamou ozdobili $7 \cdot 8 = 56$ perníkov, Kevin musel ozdobiť $60 – 56 = 4$ perníky. To mohol bez problémov stihnúť – prestal zdobiť takpovediac „po druhom kole“, keď mama a Mimi mali hotových 16 perníkov. Našli sme jedno riešenie! Je to ale naozaj jediná možnosť, ako mohlo zdobenie prebiehať?

Čo ak Mimi s mamou ozdobili $6 \cdot 8 = 48$ perníkov? Kevin by bol musel ozdobiť $60 – 48 = 12$ perníkov. Lenže Kevinovi ozdobenie 2 perníkov trvá rovnako dlho ako mame a Mimi ozdobenie 8 perníkov, čo by v tomto prípade znamenalo, že musel zdobiť celý čas s nimi. To by mu ale nebol ostal čas na ukladanie výrobkov na tácky. Takže takto to celé prebehnúť nemohlo.

Ak Mimi s mamou ozdobili menej ako 48 perníkov, tak Kevinovi by zdobenie bolo trvalo dokonca dlhšie ako ženám. Takže týmito prípadmi sa už ďalej nemusíme zaoberať. Jediná vyhovujúca možnosť je teda taká, že **Kevin ozdobil 4 perníky a Mimi s mamou ozdobili 56 perníkov.**

Z toho už ľahko dopočítame, že Mimi musela ozdobiť $7 \cdot 5 = 35$ perníkov. Keďže jeden perník jej trval 4 minúty a zdobila celý čas, tak je jasné, že **celé zdobenie trvalo $35 \cdot 4 = 140$ minút.**

Bodovanie:
určenie počtu ozdobených perníkov – 0,5b.;
určenie množstva perníkov, ktoré ozdobil Kevin – 1b.;
určenie dĺžky trvania zdobenia – 1b.;
zdôvodnenie, prečo je to jediné riešenie – 1b.;
popis postupu – 1,5b.