

Vzorové riešenia 1. série, kategória 5–7

Úloha M1: Zošit. Opravoval Juraj „Juro“ Pavlovič.

Ako prvé sa bolo treba zamyslieť nad tým, ktoré dvojice susediacich čísel sú vždy na jednom a tom istom hárku. Už keď sa pozrieme na prvé dvojice 1-2; 3-4; 5-6, vidíme, že vždy bude prvé číslo nepárne a na opačnej strane toho istého listu sa objaví číslo párne a o jedna väčšie. Z toho hneď vieme, že spolu s číslom 25 musí byť (v oboch prípadoch) na druhej stránke číslo 26.

Vieme, že listy papiera sú poukladané na seba a potom zohnuté napoly. To znamená, že **prvé dve čísla na každom liste sú rovnako vzdialené od začiatku zošita, ako sú druhé dve čísla na tom istom liste papiera vzdialené od konca zošita.** Takže ak nás zaujíma list, na ktorom sú čísla 25 a 26, tak vlastne hľadáme čísla, ktoré sú na 25. a 26. mieste od konca zošita.

Tu si treba iba dať pozor, že na 25. mieste od konca sa dostaneme výpočtom $60-24=36$ (a nie $60-25=35$, ako to mnohí spravili). Je to tak preto, lebo už začíname na prvej strane od konca, a teda sa potrebujeme „posunúť“ len o 24 strán, aby sme sa dostali na dvadsiatupiatu stranu od konca.

Takže už ľahko dopočítame:

25. miesto od konca: $60-24=36$, príp. $2600-24=2576$.

26. miesto od konca: $60-25=35$, príp. $2600-25=2575$.

Na jednom papieri budú čísla **(25)-26-35-36**, na druhom to budú **(25)-26-2575-2576**.

Bodovanie: za každé správne určené číslo 0,5b., spolu 3b.; popis postupu – 2b.

Úloha M2: Kód. Opravovala Zuzana „Zuzka“ Rendlová.

Laurin kód po Lukášovom žarte vyzeral ako na Obr. 1. Začnime od cifry 1 na mieste stoviek. Výsledok sčítania musí byť trojciferný, preto na tomto mieste nemohli byť cifry väčšie ako 3. V pôvodnom sčítaní na mieste stoviek nemohla zostať ani cifra 1, keďže Lukáš všetky cifry zmenil. Cifra 3 tiež nemohla byť na mieste stoviek v pôvodnom sčítaní, pretože v takom prípade by Laurin identifikačný kód mal na mieste stoviek cifru 9 (ostala by nezmenená), alebo by Laurin kód musel byť štvorciferný. Ani jedna z týchto možností nevyhovuje.

1	6	7
1	7	1
<u>1</u>	<u>6</u>	<u>7</u>
9	5	9

Obr. 1

Takže **namiesto cifry 1 musela byť v pôvodnom sčítaní cifra 2** – Obr. 2.

Na mieste stoviek (a tým pádom aj na mieste jednotiek) vo výsledku **môže byť 6**, ak je súčet desiatok menší ako 10; **alebo 7**, ak je súčet desiatok v rozmedzí 10-19; **alebo 8**, ak je súčet desiatok väčší ako alebo rovný 20. **Cifra 6:** Súčet jednotiek by musel byť 6 alebo 16. Ani jedna z týchto možností nevyhovuje, pretože Lukáš by buď musel zameniť aj cifru 7 za cifru 2, alebo by musel nechať cifru 7 nezmenenú. **Cifra 7:** Nevyhovuje, keďže na mieste jednotiek vo výsledku nie je možné dostať nepárne číslo. **Cifra 8:** Súčet jednotiek musí byť 8 alebo 18. Súčet 8 dostaneme, ak zmeníme cifru 7 na 3. Súčet 18 dostaneme, ak zmeníme cifru 7 za cifru 8, čo ale nemôžeme, keďže sme už cifru 8 použili na mieste stoviek vo výsledku.

2	x	x
2	x	2
2	x	x
x	x	x
Obr. 2		

2	x	3
2	3	2
2	x	3
8	x	8
Obr. 3		

Namiesto cifry 9 bola v pôvodnom súčte cifra 8 a namiesto cifry 7 bola v pôvodnom súčte cifra 3 – Obr. 3.

2	9	3
2	3	2
2	9	3
8	1	8
Obr. 4		

Namiesto cifry 9 bola v pôvodnom súčte cifra 8 a namiesto cifry 7 bola v pôvodnom súčte cifra 3 – Obr. 3.

Jediná možnosť, ako dosiahnuť, aby bol súčet desiatok väčší ako 20, je, že v pôvodnom súčte bude **namiesto cifry 6 cifra 9**. A tým pádom **namiesto cifry 5 bola pôvodne cifra 1**. Laurin pôvodný výpočet vidíme na Obr. 4.

Bodovanie: správny výsledok – 3b.; popis postupu – 2b.

Úloha M3: Družice. Opravoval Peter „Peťo“ Dupej.

Najprv potrebujeme zistiť, ako rýchlo sa družice pohybujú. Zadanie hovorí, že družica PM1 raz družicu PM2 predbehne skôr, ako sa znova stretnú v mieste štartu, ak vyštartujú rovnakým smerom. Keďže družice svoje rýchlosti po štarte už nemenia a PM1 je rýchlejšia, tak vieme, že keď sa PM1 stretne v mieste štartu s PM2, bude ju obiehajú už druhýkrát (lebo prvý raz ju musí obehnúť ešte niekde predtým). Ak ju bude obiehajú už druhýkrát, tak vieme, že bude mať o 2 obehy viac ako PM2. Predpokladajme, že PM2 urobí jeden obchod planéty, zatiaľ čo PM1 urobí 3 obehy. To znamená, že prvýkrát sa museli obehnúť, keď PM2 bola v polovici svojho prvého obchodu a PM1 bola v polovici druhého obchodu.

Teraz sa pozrime na to, koľkokrát by sa družice stretli, keby vyštartovali opačnými smermi. Keďže PM1 letí 3x rýchlejšie ako PM2, tak PM1 preletí 3/4 kruhu, zatiaľ čo PM2 preletí len 1/4. To dokopy dáva jeden celý kruh a aj prvé miesto stretnutia. Tento proces sa opakuje 3x, vždy keď PM2 preletí 1/4 okruhu, tak sa stretne s PM1, ktorá jej letí oproti. Keď PM2 dokončí štvrtú štvrtinu svojho prvého okruhu, PM1 dokončí svoj tretí okruh a stretnú sa po štvrtýkrát v štarte. Otázka znela, koľkokrát sa stretnú **kým** spoločne dorazia na miesto štartu. Správna odpoveď bola, že sa stretnú 3-krát. Štvrté stretnutie v mieste štartu sa už nepočíta.

Bodovanie: Ak ste ľubovoľným správnym spôsobom ukázali, že družice sa stretnú trikrát, dostali ste 5 bodov. Za správne určenie pomeru rýchlostí družíc aj s vysvetlením ste mohli získať 2 body. Za správne určenie miest stretnutia v druhom prípade ste mohli dostať 3 body, z čoho 1 bod bol za výsledok bez vysvetlenia. Mnohí z vás považovali predbehnutie v štarte (či už na začiatku alebo na konci) za predbehnutie predtým ako sa družice stretli v štarte, takže ste zle určili rýchlosť PM1 ako 2x väčšiu ako PM2 a potom

vám v druhej časti vyšli iba 2 stretnutia miesto 3. V takom prípade som strhol iba 2 body za chybu v prvej časti.

Poznámka: Táto úloha v skutočnosti mala viac (dokonca nekonečno) riešení. Nejdem ich tu presne rozoberať, pretože bolo veľmi náročné si ich uvedomiť a všetky nájsť. Nebolo naším zámerom sa na ne pýtať a ani sme ich od Vás nevyžadovali. Tým, ktorí sa pustili do ich hľadania, sa ospravedlňujeme za nie celkom korektné formulované zadanie a zároveň im patrí náš obdiv, pretože v tejto podobe skutočne šlo o dosť náročnú úlohu. Len pre ilustráciu, kde sa v tejto úlohe môžu nabrať viaceré riešenia, vysvetlím: Predstav si napríklad, že družice išli takými rýchlosťami, že kým jedna družica spravila 5 kolečiek okolo planéty, tak druhá stihla spraviť presne 7 kolečiek. Po krátkom zamyslení určite prídeš na to, že aj takéto rýchlosti spĺňajú podmienku zo zadania, teda že družice sa (idúc rovnakým smerom) jedenkrát predbehnú predtým, ako sa opäť stretnú v mieste štartu. To isté by platilo, keby napríklad jedna družica stihla 11 kolečiek, kým druhá stihne 13 kolečiek, alebo 25 a 27 a tak ďalej, možností je neúrekom. Takže vidíme, že možnosť, ako vyhovieť podmienke zo zadania, je veľmi veľa, nuž a od toho sa potom odvíjajú aj ďalšie riešenia úlohy – keď družice idú oproti sebe. Toto sme ale od Vás nevyžadovali a ani sme to nijako nezohľadňovali pri bodovaní.

Úloha M4: Súčiastky. *Opravoval Matěj Židek.*

Väčšinou ste postupne umiestňovali zlato do všetkých krabíc a skúšali ste, či sa to s niečím nevyklučuje.

Ak by zlato bolo v prvej krabici: V takom prípade musí byť nápis na krabici pravdivý, a teda zlato by muselo zároveň byť aj v krabici 2 alebo krabici 3. To, pravdaže, nejde, a tak sme prišli na to, že **zlato nemôže byť v prvej krabici.**

Zároveň to znamená, že nápis na prvej krabici nemôže byť pravdivý. Ten nápis ale vraví, že zlato je v druhej alebo tretej krabici. Nuž, ak má byť tento nápis nepravdivý, tak je jasné, že **zlato nemôže byť ani v druhej, ani v tretej krabici.**

A to zase na oplátku znamená, že nápisy na druhej a tretej krabici sú tiež nepravdivé. Konkrétne sme zistili, že **titán nie je v krabici číslo 1** (to nám zatiaľ príliš nepomôže) a že **v krabici číslo 3 je hliník.**

Ak by zlato bolo v krabici číslo 4: Nápis na tejto krabici by musel byť pravdivý, a tak by nám prezradil, že nikel je v krabici číslo 3 („o jedna menšej ako krabica so zlatom“). Ale počkať... My už predsa vieme, že v krabici číslo 3 je určite hliník. Takže ani táto možnosť sa nám nepotvrdila – **zlato nie je v krabici číslo 4.**

Vyčerpali sme všetky ostatné možnosti, a tak neostáva iné, ako povedať, že **zlato je v krabici číslo 5.** Tým pádom nám pravdivý nápis na tejto krabici povie, že **platina je v krabici číslo 4**, pretože je to jediná voľná krabica s vyšším číslom, ako má krabica s hliníkom.

Ďalej **titán už môže byť jedine v krabici číslo 2**, lebo kdesi máme nepravdivý nápis, že titán je v krabici číslo 1 – takže tam byť nemôže. Pre nikel ostala už len krabica číslo 1.

Nakoniec sa musíme ešte uistiť – na čo niektorí zabudli – že jednotlivé pravdivé a nepravdivé nápisy skutočne zodpovedajú rozloženiu súčastok. Keď si to prejdeme, zistíme, že všetko sedí. Vyšla nám teda jediná správna možnosť, a to: **1 – nikel; 2 – titán; 3 – hliník; 4 – platina; 5 – zlato.**

Bodovanie: Všetky strhnutia bodov sú odôvodnené priamo v riešení.

Úloha M5: Poškodené dáta. Opravovala Katarína „Katka“ Marčeková.

Zo zadania vieme, že každá dvojica susediacich číslic tvorí dvojciferné číslo, ktoré je deliteľné 17 alebo 23. Vypíšme si teda všetky dvojciferné násobky čísel 17 a 23. Dvojciferné násobky čísla 17: **17, 34, 51, 68, 85**, (102 už je priveľa). Dvojciferné násobky čísla 23: **23, 46, 69, 92**, (115 už je priveľa).

Všimnime si, že každé z týchto čísel sa končí inou cifrou. Z tohto zistenia vyplýva, že **každému číslu vieme jednoznačne priradiť jeho ľavého suseda**. Inými slovami: máme len jednu možnosť, ako môže vyzeráť záznam dát. Začneme od poslednej číslice celkom vpravo, lebo tú ako jedinú poznáme, a postupne pridávame ďalšie a ďalšie číslice smerom doľava:

... 9 2 3 4 6 9 2 3 4 6 9 2 3 4 6 8 5 1 7

Všimneme si, že istá časť kódu sa pravidelne opakuje (podčiarknutá). Teraz už len potrebujeme zistiť, ktorá číslica z tohto opakujúceho sa úseku bude mať to šťastie, že sa ocitne presne na začiatku 2014-miestneho kódu.

Najprv od čísla 2014 odpočítame 4 – lebo to je počet cifier na konci kódu, ktoré sa neopakujú. $2014 - 4 = 2010$. Potom výsledok vydělíme 5 – lebo to je dĺžka opakujúceho sa úseku. $2010 : 5 = 402$, zvyšok 0.

Číslo 2010 je číslom 5 deliteľné bezo zvyšku. To znamená, že v kóde sa celý tento 5-ciferný úsek zopakuje presne 402-krát. A tak je jasné, že prvá cifra celého kódu bude rovnaká ako prvá cifra opakujúcej sa časti, teda **cifra 9**.

Bodovanie: 1 bod za vypísanie dvojciferných násobkov čísel 17 a 23, 2 body za nájdenie posledných pár číslic kódu a objavenie opakujúcej sa časti, 1 bod za zistenie zvyšku z čísla 2010 po delení číslom 5 a 1 bod za správny výsledok. 0,5 bodu som strhávala, ak v riešení nebolo uvedené, že záznam dát sa dá určiť jednoznačne.



p - mat

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat