

Vzorové riešenia 2. série, kategória 5–7

Úloha M1: Konferencia. Opravoval Samuel „Samko“ Cibulka.

Počet novinárov vieme jednoducho zrátať zo zadania. Stačí si uvedomiť, že každý novinár musí mať po svojej pravici buď novinára, alebo vedca. Potom počet novinárov dostaneme ako súčet novinárov, ktorí majú po svojej pravici novinára (takých je 7) a novinárov, ktorí majú po svojej pravici vedca (takých je 12). Preto novinárov je $7 + 12 = 19$.

Teraz si predstavme nejaký náhodný stôl, za ktorým nejako sedia novinári a vedci – napríklad ako na Obr. 1. Ďalej spravme čiaru medzi každú dvojicu novinár-vedec – ako na Obr. 2. Takto sme si stôl rozdelili na úseky, v ktorých sedia buď len samí novinári, alebo len samí vedci.

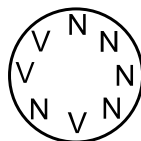
Teraz vidíme, že v každom takomto úseku novinárov je práve jeden novinár taký, že má po svojej pravici vedca. Keďže vieme, že na celej konferencii je takých novinárov, ktorí majú po svojej pravici vedca, presne 12, znamená to, že aj týchto „*novinárskych úsekov*“ tam bude presne 12.

No a keďže úseky sa (samozrejme) striedajú, tak musí byť rovnako veľa aj „*vedeckých úsekov*“. Teda je taktiež 12 vedcov, ktorí majú po svojej pravici novinára.

Už stačí len využiť poslednú informáciu zo zadania – že týchto 12 vedcov tvorí tri štvrtiny z celkového počtu vedcov. Z toho už ľahko dopočítame, že celkový počet vedcov musí byť $12 \cdot 4/3 = 16$. Novinárov je 19 a vedcov je 16, teda **za stolom sedí viac novinárov**.

Bodovanie:

počet novinárov – 1b.; počet vedcov, ktorí majú po pravici novinára – 3b.; dorátanie počtu vedcov – 1b.; ak ste počítali iba s nejakým konkrétnym rozostavením, tak ste mohli stratiť do 2 bodov.



Obr. 1



Obr. 2

Úloha M2: Palivo. *Opravovala Ľudmila „Ľudka“ Šimková.*

Vieme, že Lukáš naplňal palivové nádrže tak, že každá trojica políčok v tvare „L“ (budeme ju volať „L-ko“) mala rovnaký súčet. Z obrázka tento súčet ľahko zistíme. Vidíme tam L-ko, ktorého políčka poznáme všetky. Ich súčet je $17 + 12 + 21 = 50$. Teraz ľahko doplníme políčka označené na Obr. 1 písmenami **A** a **B** tak, aby vyznačené L-ká mali požadovaný súčet 50:

$$A = 50 - 17 - 27 = 6,$$

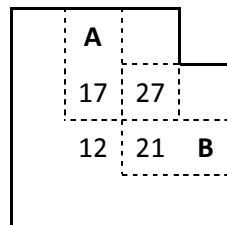
$$B = 50 - 27 - 21 = 2.$$

Ďalej už nevieme zistiť presnú hodnotu žiadneho ďalšieho políčka. My však ani nepotrebuje vedieť hodnotu každého políčka, stačí, ak vieme súčty niektorých políčok.

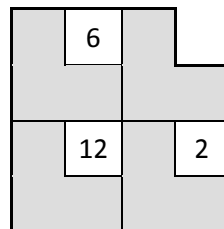
Pokúsme sa displej pokryť neprekrývajúcimi sa L-kami tak, aby nám ostali nepokryté len také políčka, ktorých hodnotu poznáme. To sa dá napríklad tak, ako na Obr. 2. Podarilo sa nám tam vopchať 4 L-ká, ktorých súčet podľa podmienky zo zadania musí byť $4 \cdot 50 = 200$. Plus ostali tri nepokryté políčka so súčtom $6 + 12 + 2 = 20$ (Obr. 2). Už len sčítame tieto dve hodnoty a vyjde nám, že **v nádržiach bolo dokopy 220 hektolitrov paliva.**

Bodovanie:

výsledok pre jedno konkrétne doplnenie – 2b.;
odôvodnenie, prečo je súčet vždy rovnaký – 5b.



Obr. 1



Obr. 2

Úloha M3: Profesor. *Opravovala Michaela „Miški“ Zatrochová.*

Z tvrdení, ktoré povedal profesor, vieme, že počet detí jeho dcér je 3, 2, 1. Pretože: Ivana nemá ani brata a ani sestru, takže je jedináčik. Júlia má dvoch bratov a žiadnu sestru, takže sú doma tri deti. No a tým pádom tretia profesora dcéra musí mať 2 deti, lebo všetkých vnúchat dokopy je podľa zadania 6, takže $6 - 3 - 1 = 2$.

Keďže vieme, že Beáta má najviac detí, bude ich mať 3. Andrea nemá dcéru, a teda Ivanina mama musí byť Cecília. Profesor tiež povedal, že Hektor aj Emil majú sestru, takže musia byť v Beätinej rodine spolu s Júliou. No a už ostávajú iba Ferko a Gabriel, ktorí tým pádom musia mať mamu Andreu. Po ešte jednom

skontrolovaní, že toto rozdelenie neodporuje ani jednému profesorovmu výroku, môžeme spokojne prehlásiť, že sme našli riešenie! 😊

Bodovanie:

správny výsledok – 2b.; popis postupu – 3b.

Úloha M4: Kameň. Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.

Očísľujme si vrstvy v kameni od 1 po 5000. Vrstva 1 podľa zadania podporuje život. Zároveň ho tým pádom podporuje aj 6., 11., 16., 21., 26., ... vrstva, pretože sú od seba vzájomne na vzdialenosť 5. Môžeme pokojne povedať, že všetky vrstvy končiace na 1 alebo 6 podporujú život. Stačí začať s jednotkou a pripočítavať k nej stále dokola 5.

Ako sú na tom ostatné vrstvy? Pozrime sa na pravidlo, ktoré hovorí, že aj každá 13. vrstva podporuje život, pokiaľ začneme nejakou, ktorá ho podporuje. Vrstva 1 podporuje život. Takže aj vrstvy 14, 27, 40, 53, ... podporujú život. Tu si treba uvedomiť dôležitú vec, na ktorej ste mnohí stratili body. Keď si vezmeme vrstvu č. 14, tak aj okolo nej sú vo vzdialenosti 5 také vrstvy, ktoré podporujú život. To sú vrstvy 19, 24, 29, 34, ..., ale aj 4 a 9. Sú to všetky také vrstvy, ktoré končia číslicou 4 alebo 9.

Tu sa naše skúmanie zďaleka nekončí, ba priam naopak, práve sa rozbiehame. Tak poďme po poriadku. Ak vrstva 27 podporuje život, tak aj vrstvy 2, 7, 12, 17, 22, ... podporujú život. Opäť tak ako minule, je to každá piata vrstva a sú to všetky také, ktoré končia na 2 alebo 7.

Podobným spôsobom teraz začneme s vrstvou 40 a zistíme, že keď pôjdeme po 5 vrstvách hore alebo dolu, nájdeme vrstvy 5, 10, 15, 20, 25, ..., čiže všetky končiace na 0 alebo 5. Nakoniec preskúmame životodarnú vrstvu č. 53, okolo ktorej sa tiahnu zástupy vrstiev s číslami 3, 8, 13, 18, 23, 28, ..., samozrejme vzorne dodržiavajúce vzájomnú vzdialenosť 5. Ich spoločnou vlastnosťou je, že sa ich poradové čísla končia na 3 alebo 8.

Tu sa naše skúmanie kameňa končí. Zistili sme, že vrstvy podporujúce život sú všetky také, ktoré sa končia na číslice 1, 6, 4, 9, 2, 7, 0, 5, 3, 8. Takže **všetky vrstvy, a to bez výnimky, podporujú život.**

Bodovanie:

postup, ktorý objasňuje, prečo je to každá vrstva – 5b.; ak ste ukázali, že to ide napr. pre vrstvy 1 až 20, a potom ste už nevysvetlili, prečo to platí aj pre ostatné – 3-4b.; správny, ale nedotiahnutý nápad – 2-3b.; pre tých, čo nepochopili zadanie a riešenie bolo niekde okolo 1308 vrstiev – 1b.

Úloha M5: Sektor. Opravoval Michal „Kesy“ Kesely.

Zadanie od nás vyžaduje nájsť najväčšie 4-ciferné číslo s rôznymi ciframi také, že po vyškrtnutí tak posledných dvoch cifier, ako aj prostredných dvoch cifier, ako aj druhej a štvrtej cifry dostaneme dvojciferné prvočíslo. To znamená, že ak si predstavíme 4-ciferné číslo ABCD, tak čísla AB, AC aj AD musia byť prvočísla.

Takže nás budú zaujímať dvojciferné prvočísla – čísla deliteľné len jednotkou a samým sebou. Tie si buď môžeme skúšaním nájsť, alebo si ich vyhľadať na internete. Sú to tieto: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 a 97. Len pre zaujímavosť, najčastejšie ste (nesprávne) do tohto zoznamu zaradili aj čísla 49 ($=7 \cdot 7$), 51 ($=3 \cdot 17$), 87 ($=3 \cdot 29$) a 91 ($=7 \cdot 13$).

Tri dvojciferné prvočísla, ktoré nám majú vzniknúť, teda AB, AC aj AD, začínajú na tú istú cifru. Preto môžeme hneď vylúčiť ako začiatočnú cifru 9 aj 8 – jednoducho nemáme dost prvočísel začínajúcich na tieto cifry. Na cifru 7 nám začínajú 3 prvočísla (71, 73 a 79), preto by sme mohli skúsiť najväčšie štvorciferné číslo, aké sa z nich dá vytvoriť: **7931**.

Toto číslo však nie je deliteľné tromi. Podobne môžeme vyskúšať vydeliť trojkou aj ostatné možnosti – 7913, 7391, 7319, 7193 a 7139. O niečo elegantnejšie je uvedomiť si, že číslo je deliteľné tromi práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný tromi. A ciferný súčet vo všetkých šiestich predchádzajúcich možnostiach je rovnaký: $7 + 9 + 3 + 1 = 20$. Takže žiadne číslo vytvorené z týchto cifier nemôže byť deliteľné tromi.

Číslo sektoru tiež nemôže začínať cifrou 6 ani 5, lebo tam opäť nemáme dostatok prvočísel na zostrojenie vhodného riešenia.

Ďalej sa ponúka cifra 4. Tou začínajú prvočísla 41, 43 a 47. Z nich vieme vytvoriť najväčšie číslo 4731. Z jeho ciferného súčtu vyplýva, že je deliteľné tromi. Preto **4731 je najväčším číslom spĺňajúcim podmienky zadania, a teda číslom sektoru.**

Bodovanie:

správny výsledok – 1,5b.; postup – 3,5b.



p - mat

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat