Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

32. ročník www.pikomat.sk školský rok 2014/2015

Vzorové riešenia 3. série, kategória 5–7

Úloha M1: Misia Škriatok. *Opravoval Roman Kluvanec.*

Vieme, že z piatich e-mailov je **len jeden pravdivý**. Najskôr sa pozrime na druhý a piaty e-mail. *E-mail-2* tvrdí, že odlet je neskôr ako 13-teho, kým *E-mail-5* tvrdí, že odlet je skôr ako 17-teho. Hneď vidíme, že aspoň jeden z týchto e-mailov musí byť určite pravdivý, lebo predsa každý dátum je buď neskôr ako 13-teho alebo skôr ako 17-teho. Zároveň musíme vylúčiť dátumy 14.-15.-16., pretože vtedy by boli pravdivé oba tieto e-maily. Takže náš dátum bude buď niekedy do 13-teho, alebo od 17-teho neskôr.

Taktiež to znamená, že všetky ostatné e-maily už musia byť nepravdivé. Tým pádom vieme, že hľadaný dátum:

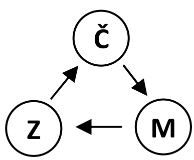
- kvôli *E-mailu-1*: je **párne** číslo;
- kvôli *E-mailu-3*: **sa dá** zapísať ako súčin dvoch rovnakých prirodzených čísel;
- kvôli *E-mailu-4*: **sa nedá** zapísať ako súčin troch rovnakých prirodzených čísel.

Čísla, ktoré sa dajú zapísať ako súčin dvoch rovnakých prirodzených čísel, sú: 2·2=**4**; 3·3=**9**; 4·4=**16**; 5·5=**25**; 6·6=**36**... Pokračovať nemusíme, pretože toľko dní žiaden mesiac nemá (už aj 36 je priveľa). Párne sú iba 4 a 16, avšak číslo 16 sme vylúčili ešte v prvom odseku kvôli *E-mailu-2* a *E-mailu-5*. A tak vyhovuje jedine číslo 4. **Dátum odletu rakety bol 4. apríla.**

Bodovanie:
overenie pravdivosti každého *E-mailu* – 1b.; za menšie nejasnosti som strhával okolo 1b.

Úloha M2: Zamknuté dvere. *Opravovala Zuzana „Zuzka“ Rendlová.*

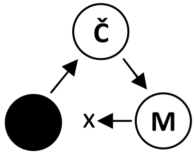
Na dverách máme 544 červených, 322 modrých a 511 zelených krištáľov. Vieme, že po zatlačení sa červený krištáľ premení na modrý; modrý krištáľ sa premení na zelený; a zelený krištáľ sa premení na červený (Obr. 1).



Obr. 1

To vlastne znamená, že pokým sú na dverách zastúpené všetky tri farby, tak **celkový počet všetkých krištáľov sa vôbec nemení** – vždy jeden krištáľ zmizne a jeden pribudne (len inej farby).

Laura nám v zadaní hovorí, že až keď zmiznú všetky krištále jednej farby, tak potom už krištále danej farby nebudú pribúdať. Ak by napríklad zmizli všetky zelené krištále, tak potom keď astronauti zatlačia na modrý krištáľ, tak ten iba zmizne a žiaden nový nepribudne (Obr. 2). No a to znamená, že **až vtedy celkový počet krištáľov konečne začne klesať**.



Obr. 2

Astronauti sa teda budú snažiť čo najskôr zbaviť všetkých krištáľov jednej farby. Tým pádom je jasné, že sa ako prvé vrhnú na tie krištále, ktorých je najmenej a všetky postláčajú. V tomto prípade to znamená stlačenie 322 modrých krištáľov. Nezabúdajme však, že tieto sa ešte všetky premenia na zelené, a teda na dverách ostane 511+322 = 833 zelených a 544 červených krištáľov.

Ďalej už budú astronauti stláčať vždy iba tie krištále, ktoré sa „nevrátia“ v inej farbe – aby celkový počet krištáľov naďalej klesal. Takže najprv zatlačia na 544 červených krištáľov a nakoniec na 833 zelených.

Astronauti najrýchlejšie otvoria dvere tak, že **najskôr zatlačia na všetky modré, potom na všetky červené a nakoniec na všetky zelené krištále**. Budú na to potrebovať 322 + 544 + (511+322) = **1699 zatlačení**.

Bodovanie:
správny výsledok s odôvodnením – 5b.; body som strhávala za neúplné vysvetlenie alebo, ak ste sa pustili do skúšania všetkých možností, za vynechanie niektorých možností.

Úloha M3: Posádka lode. *Opravovala Lenka „Lenika“ Bendová.*

Máme troch členov posádky s menami *Altair*, *Bismark* a *Canris*, ďalej troch mechanikov, taktiež s menami *Altair*, *Bismark* a *Canris*. Okrem toho zadanie spomína tri planéty: *Kapteyn*, *Gliese* a *Venušu*.

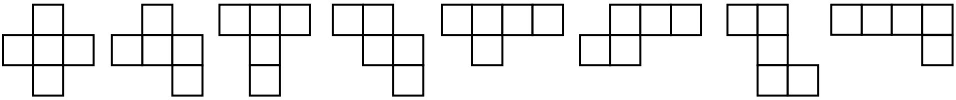
Ako prvé sa dozvedáme, že mechanik *Canris* býva na *Gliese*. Na tej istej planéte ako kapitán, takže na *Kapteyne*, vraj býva aj mechanik, ktorý je vyštudovaný teoretický fyzik. Keďže o mechanikovi *Bismarkovi* vieme, že teoretickú fyziku nikdy neštudoval, tak na *Kapteyne* môže bývať jedine mechanik *Altair*. Zadanie tiež hovorí, že jeden z mechanikov býva na *Venuši*, takže to musí byť zostávajúci mechanik *Bismark*. Keďže tento mechanik z *Venuše* sa má volať rovnako ako kapitán, tak sme zistili, že kapitán sa volá *Bismark*.

Posledná informácia zo zadania hovorí, že člen posádky *Altair* hráva s navigátorom šach. Keďže už sme zistili, že kapitán sa volá *Bismark*, tak *Altair* môže byť kopilot alebo navigátor. Aj na vesmírnej lodi by bolo zvláštne, aby niekto hral šach sám so sebou, takže *Altair* nemôže byť navigátor, a teda je kopilot. A len pre úplnosť: navigátor sa volá *Canris*. **Meno kopilota vesmírnej lode je *Altair*.**

Bodovanie:
správne riešenie a úplný postup – 5b.; správne riešenie a neúplný postup – 3 až 4,5b.; správne riešenie bez postupu – 2,5b.; nesprávne riešenie, ale s nejakým aspoň čiastočne správnym postupom – 0,5 až 2b.; nesprávne riešenie bez postupu – 0b.

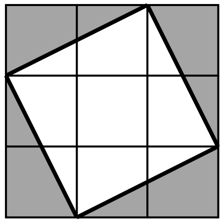
Úloha M4: Opevnenie. *Opravovala Barbora „Anabelka“ Chabanová.*

Zo zadania vieme, že opevnenie je kocka bez jednej („vrchnej“) steny. Je teda zložené z piatich stien kocky – 5 štvorcov – a má sa rozpojiť na 3 časti, z ktorých sa bude dať poskladať štvorec. Najprv sa pozrieme na to, ako opevnenie mohlo vyzerať po rozpojení:



Teraz sa poďme pozrieť na to, ako bude vyzerať výsledný štvorec. Podľa odporúčania použijeme štvorčekový papier a predstavíme si, že jeden štvorček na tom papieri má stranu dlhú 1 SV. Tiež vieme, že výsledný štvorec musí mať obsah 5 SV² (lebo je zložený z piatich stien pôvodného opevnenia). Mala by nám postačiť štvorčeková sieť 3×3, ktorej obsah tým pádom bude $3 \cdot 3 = 9$ SV^2.

3 SV

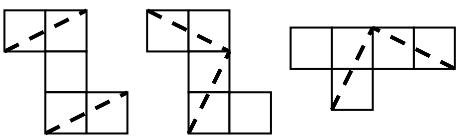


Obr. 1

A ideme hľadať štvorec s obsahom 5 SV^2. Po chvíli trápenia pravdepodobne prídeme na to, že vodorovné a zvislé čiary asi nie sú tá najlepšia voľba. Keď sa ale chvíľu budeme hrať so šikmými čiarami, isto onedlho natrafíme na štvorec napr. ako na Obr. 1. Každá jeho strana je vlastne uhlopriečkou malého obdĺžnika, zloženého z dvoch štvorčekov. Keďže uhlopriečka delí obdĺžnik na polovice, tak obsah jedného sivého trojuholníka na Obr. 1 bude presne 1 SV^2. Keď teraz odčítame 4 sivé trojuholníky od obsahu celej siete 3×3, dostaneme: 9 SV² – 4 SV² = 5 SV². Takže sme našli vyhovujúci štvorec.

Keď už vieme, aké budú strany nášho výsledného štvorca, ideme teda skúsiť rozpájať steny opevnenia tak, aby sa dal požadovaný štvorec aj poskladať. Čiže útvary budeme rozpájať šikmou čiarou vedenou cez dva štvorčeky. Ak už máme nejaký rez naznačený, tak ďalšie by mali byť buď kolmé naň, alebo rovnobežné s ním. Vieme totiž, že strany štvorca sú na seba buď kolmé, alebo rovnobežné. Tiež dávame pozor na to, aby žiadna časť, ktorá nám vznikne, neprekročila dĺžku uhlopriečky dvoch štvorčekov.

Všetkých možností, ako sa opevnenie mohlo rozpojiť, je pomerne veľa, za všetky si ukážeme aspoň tri:



Bodovanie:

správne riešenie bez postupu – 2,5b.; postup – 2,5b.; len zistenie veľkosti výslednej strany štvorca – 0,5b.

Úloha M5: Xcross. *Opravoval Pavol „Lietadlo“ Koprda.*

Našou úlohou je zistiť, či má Lukáš začínať, alebo ísť ako druhý, aby mal stratégiu, ktorou môže vždy vyhrať. To, ako bude hrať súper, povedať nevieme, a preto Lukášova stratégia musí počítať s každou možnou kombináciou ťahov súpera.

Ako prvé je dobré si všimnúť, že keď sa hra dostane do stavu, že ostáva posledný riadok alebo posledný stĺpec, tak hráč, ktorý je vtedy na ťahu, vyhral, pretože jednoducho ten riadok či stĺpec vyškrtne.

Druhá veľmi užitočná vlastnosť, ktorú si môžeme všimnúť, je to, že nie je dôležité, ktorý riadok škrtneme. Jednoducho preto, lebo riadky sa medzi sebou navzájom nijako neovplyvňujú. Zaujímavý je len ich počet – koľko ich je – a nie to, ako sú usporiadané. To isté, pravdaže, platí aj o stĺpcoch. Každopádne ale môžeme povedať, že **každým ťahom sa jeden z rozmerov hracej plochy vždy zníži o jedna** – buď ubudne jeden riadok, alebo ubudne jeden stĺpec.

Na začiatku hry je 7 riadkov a 10 stĺpcov. Každým ťahom sa jeden rozmer zníži o 1. Akonáhle je jeden z rozmerov rovný 1, tak hráč, ktorý je na ťahu, vyhral. Z toho plynie, že **obaja hráči sa budú snažiť nespraviť taký ťah, aby po ňom zostali rozmery (1 × *niečo*) alebo (*niečo* × 1)**. To znamená, že keď sa jeden z rozmerov, povedzme napríklad počet stĺpcov, zníži až na 2, tak už si žiaden hráč netrúfne vyškrtnúť ten predposledný stĺpec, lebo by prehral. A tak obaja hráči budú škrtať už len riadky. Po čase ale aj ten druhý rozmer klesne na 2 a hráčom ostane hrací plán 2×2. Tu už nieto pomoci, hráč, ktorý je vtedy na ťahu, musí vyškrtnúť buď predposledný stĺpec, alebo predposledný riadok, a teda jeho súper v ďalšom ťahu vyhrá.

Na začiatku je teda hra v stave 7×10 a ak obaja hrajú tak, že nechcú prehrať, tak sa hra po čase určite dostane do stavu 2×2. Na to, aby sa hra dostala zo stavu 7×10 do stavu 2×2, treba škrtnúť 5 riadkov a 8 stĺpcov – teda treba spraviť dokopy 13 ťahov. Takže hráč, ktorý robí 14. ťah (ťah za stavu 2×2), prehrá. Keďže 14 je párne číslo, ľahko si spočítame, že štrnásty ťah robí hráč, ktorý išiel ako druhý. To znamená, že vyhrá hráč, ktorý začínal. **Ak chce Lukáš vyhrať, musí začínať a hrať podľa vyššie popísanej stratégie.**

Bodovanie:
odpoveď – 1,5b.; vysvetlenie, ako sme k tej odpovedi dospeli – 1b.; dôkaz – 2,5b.