Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

32. ročník www.pikomat.sk školský rok 2014/2015

Vzorové riešenia 4. série, kategória 5–7

Úloha M1: Miesto pristátia. *Opravovala Barbora „Anabelka“ Chabanová.*

Poďme najprv zistiť, aké prvočísla vôbec prichádzajú do úvahy. Vieme, že každé z nich vzniklo ako súčet 4 rôznych čísel od 1 do 8 (lebo predsa každá stena planéty má 4 vrcholy). Takže najmenšie číslo, aké mohlo vzniknúť, je 1+2+3+4 = 10; no a najväčšie číslo, aké mohlo vzniknúť, je 8+7+6+5 = 26. Zistili sme, že prvočísla budú v rozmedzí od 10 do 26. Také prvočísla sú: **11, 13, 17, 19 a 23**. Je ich presne päť, takže to znamená, že každé musí byť použité práve raz.

Teraz nám už len treba zistiť, ako poukladáme čísla 1 až 8 do vrcholov kocky, aby na jej stenách vzniklo práve týchto 5 súčtov.

Pozrime sa na to, ako sa dajú tieto prvočísla rozložiť na súčet 4 sčítancov. Začneme číslom 11, lebo to sa dá rozložiť jediným spôsobom: 1+2+3+5; inak sa nám to nepodarí. Tým pádom sme zistili, že **čísla 1, 2, 3 a 5 budú tvoriť jednu stenu kocky**.

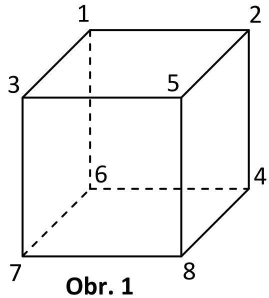
To ale hneď aj znamená, že **vo zvyšných vrcholoch kocky musia byť všetky ostatné čísla, čiže 4, 6, 7 a 8**. No a tieto vrcholy zároveň tvoria rohy náprotivnej steny kocky, čiže sme dostali **súčet ďalšej steny: 4+6+7+8 = 25**. Keďže toto číslo nie je prvočíslo, tak vieme, že sme našli hľadaný súčet šiestej steny. Hurá!

Stále však treba overiť, či sa naozaj bude dať rozmiestniť čísla do vrcholov tak, aby všetko platilo – teda aby sme dostali na jednotlivých stenách súčty 11, 13, 17, 19, 23 a 25. Mnohí z Vás na toto zabudli, no je to dôležité, lebo ešte stále by sa mohlo stať aj to, že úloha vôbec nebude mať riešenie.

Tak sa ďalej pozrime na prvočíslo 13. To vieme dostať týmito súčtami: 1+2+3+7 alebo 1+2+4+6 alebo 1+3+4+5. Avšak možnosti 1+2+3+7 a 1+3+4+5 majú ten problém, že každá obsahuje až tri čísla, ktoré už boli použité v stene so súčtom 11. Lenže na kocke môžu mať dve steny spoločné najviac dva vrcholy, čiže nemôžeme tri čísla použiť aj v jednej, aj v druhej stene. Tieto možnosti preto vylúčime a ostane nám **jediná možnosť pre stenu so súčtom 13: 1+2+4+6**.

Teraz sa zamerajme na prvočíslo 23. Keďže je najväčšie, tak by sa dalo čakať, že nebude mať veľa možností súčtov. A veru má tiež len tri možnosti. Sú to: 2+6+7+8 alebo 3+5+7+8 alebo 4+5+6+8. Tu je situácia podobná ako v predošlom odseku. Každá z možností 2+6+7+8 a 4+5+6+8 obsahuje až tri čísla, ktoré už boli použité v stene so súčtom 25. Tieto možnosti preto vylúčime a ostane nám **jediná možnosť pre stenu so súčtom 23: 3+5+7+8**.

S týmito zisteniami už ľahko nájdeme nejaké vyhovujúce usporiadanie čísel – jedno uvádzam na Obr. 1.



Obr. 1

Bodovanie:
chýbajúci dôkaz, že riešenie je jediné možné – mínus 1b.; chýbajúci dôkaz, že takáto vyhovujúca kocka sa dá vôbec zostrojiť – mínus 0,5b.; ostatné strhnutia bodov popísané priamo v riešeniach.

Úloha M2: Pristávací manéver. *Opravovala Kristína „Kika“ Prešinská.*

Máme dlhočizné číslo, ktoré vzniklo tak, že počítač napísal za seba všetky prirodzené čísla od 1 do 200, čím vzniklo číslo 123456789101112...198199200. My máme zistiť, či je toto číslo deliteľné 9. Číslo je deliteľné deviatimi vtedy, keď je jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi. Treba nám teda zistiť ciferný súčet tohto dlhého čísla. Aby sa nám lepšie pracovalo, rozdelíme si ho späť na čísla 1, 2, 3, ...198, 199, 200 – teda na prvých dvesto prirodzených čísel.

Vo Vašich riešeniach sa najčastejšie vyskytovali dva spôsoby. Oba boli správne, no tu si detailnejšie popíšeme iba jeden z nich, konkrétne: **zistíme, koľkokrát sa každá číslica nachádza v týchto 200 číslach.**

Číslicu 0 môžeme ignorovať, lebo nemení ciferný súčet.

Číslica 1 sa nachádza na mieste jednotiek v číslach 1, 11, 21, ...181, 191. Týchto čísel je spolu 20. Na mieste desiatok sa nachádza v číslach 10, 11, 12, ...19, a potom ešte 110, 111, 112, ...119. Takže na mieste desiatok sa vyskytuje tiež 20-krát. Na mieste stoviek sa číslica 1 vyskytuje vo všetkých číslach od 100 až po 199, čiže v 100 číslach. Spočítali sme, že **jednotka sa v celom dlhom čísle nachádza 140-krát**.

S číslicou 2 je postup podobný. Na mieste jednotiek a desiatok je na tom rovnako ako číslica 1. Na mieste jednotiek sa nachádza v číslach 2, 12, 22, ...182, 192 (spolu v 20 číslach) a na mieste desiatok v číslach 20, 21, 22, ...29, a potom ešte 120, 121, 122, ...129 (tiež spolu v 20 číslach). Na mieste stoviek sa nachádza len v čísle 200, teda raz. **Dvojka sa v celom dlhom čísle nachádza 41-krát**.

Číslice 3 až 9 sú na tom všetky rovnako. Podobne ako v predošlých odsekoch, aj tu prídeme na to, že každá z týchto číslic sa na mieste jednotiek nachádza 20-krát a že každá sa na mieste desiatok nachádza tiež 20-krát. Na mieste stoviek sa tieto číslice nenachádzajú. Takže **číslice 3 až 9 sa v celom dlhom čísle nachádzajú 40-krát**.

Celé dlhé číslo sa teda skladá zo 140 jednotiek, 41 dvojek, 40 trojek, 40 štvoriek, 40 pätiek, atď. až po ...40 deviatok. Ciferný súčet tým pádom spočítame jednoducho ako $140\cdot 1 + 41\cdot 2 + 40\cdot(3+4+5+6+7+8+9) = 1902$. Číslo 1902 nie je deliteľné deviatimi, pretože 1902/9 = 211 zvyšok 3. Takže sme prišli na to, že **číslo na obrazovke NIE JE deliteľné 9.**

Poznámka:
Druhý často používaný (a rovnako správny) spôsob riešenia sa zameriaval na to, že sme najprv sčítali dokopy všetky číslice na miestach jednotiek, potom všetky číslice na miestach desiatok, a nakoniec všetky číslice na miestach stoviek.

Bodovanie:
uvedenie podmienky pre deliteľnosť deviatimi – 1b.; určenie počtu jednotiek alebo súčtu všetkých číslic na mieste jednotiek – 1b.; určenie počtu dvojek alebo súčtu všetkých číslic na mieste desiatok – 1b.; určenie počtu ostatných číslic alebo súčtu všetkých číslic na mieste stoviek – 1b.; celkový ciferný súčet a určenie deliteľnosti – 1b.

Úloha M3: Prieskum planéty. *Opravovala Katarína „Katka“ Marčeková.*

V prvom prieskume bolo 21 dronov rozdelených do troch skupín po 7 dronov. Našou úlohou je zistiť, či je možné dronov rozdeliť na ďalší prieskum do troch skupín tak, aby žiadna trojica dronov, ktoré boli spolu v skupine pri prvom prieskume, nebola spolu pri druhom prieskume.

Nazvime skupiny pri prvom prieskume A, B, C a skupiny pri druhom prieskume D, E, F. Poďme skúsiť vybrať dronov do skupiny D. Aby sme neporušili kapitánovu podmienku, môžeme vybrať najviac dvoch dronov zo skupiny A, najviac dvoch dronov zo skupiny B a najviac dvoch dronov zo skupiny C. Ak by sme totiž vybrali z niektorej bývalej skupiny 3 alebo viac dronov, tak už by tvorili presne takú trojicu, akú kapitán zakázal. Do skupiny D teda môžeme vybrať 2+2+2 = 6 dronov. V skupine D však musí byť dokopy 7 dronov, preto musíme ešte jedného pridať. Tohto siedmeho drona musíme vybrať z jednej z bývalých skupín A, B, alebo C. Ale v skupine D už máme po dvoch dronoch zo skupín A, B aj C, a teda keď k nim pridáme ďalšieho z jednej z týchto skupín, určite s niektorou dvojicou vytvorí „zakázanú“ trojicu. **Dronov** do skupiny D teda **nevieme vybrať tak, aby sme splnili kapitánovu požiadavku**. Rovnako by sme nevedeli vybrať dronov ani do skupín E, F, preto **nie je možné splniť kapitánovu požiadavku**.

Bodovanie:
myšlienka, že do nových skupín môžeme vyberať najviac po dvoch dronoch z pôvodných skupín – 2,5b.; myšlienka, že po pridaní siedmeho drona sa v novej skupine bude nachádzať trojica – 1,5b.; konštatovanie, že kapitánova podmienka sa nedá splniť – 1b.

Úloha M4: Zabezpečenie lode. *Opravovala Irena „Enka“ Bačinská.*

Najprv si ujasnime, čo je našou úlohou. Hlas počítača oznámil: *„Ak prvý z vás, ktorý povie „čierna“ alebo „biela“, uhádne farbu kruhu, ktorý má on sám nad hlavou, pustím vás do lode. Ak nie, nepustím vás.“* To znamená, že ak niekto ako prvý povie farbu svojho kruhu, rozhoduje o tom, či sa celá posádka dostane alebo nedostane do lode. Nemusí to byť nutne prvý v rade. My teda potrebujeme zistiť, či niektorý člen vie naisto určiť farbu kruhu nad svojou hlavou.

Vžime sa najprv do kože posledného člena posádky. Ten toho vie predsa najviac – vidí pred sebou farbu až dvoch kruhov. Tieto môžu mať buď rovnakú farbu, alebo rôznu.

Ak by mali rovnakú farbu, tak sa posledný člen môže tešiť. Počítač im totiž povedal, že nemajú farbu kruhu všetci traja rovnakú. Tým pádom ak pred sebou vidí dva rovnaké kruhy, s istotou vie, že on má farbu svojho kruhu presne opačnú. Takže v takomto prípade posledný člen bez váhania zakričí opačnú farbu, než akú vidí pred sebou a posádka sa dostane do lode.

Ale čo v prípade, keď pred sebou posledný člen vidí rôzne farby? Vtedy nemôže jednoznačne určiť farbu svojho kruhu, lebo nevie, či sú dva kruhy biele a jeden čierny, alebo naopak dva kruhy čierne a jeden biely. Ostáva mu jedine povedať „neviem“.

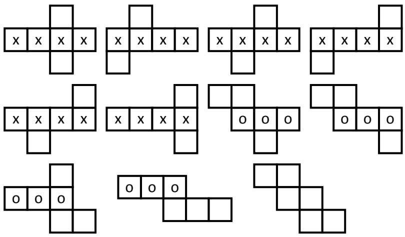
Tu sa ale dostáva na rad prostredný člen posádky. Keď sa nad celým problémom zamyslí presne tak isto, ako sme práve popísali, tak je mu jasné, že posledný člen povedal „neviem“ preto, lebo videl pred sebou dva rôzne kruhy.

Tým pádom môže prostredný člen smelo povedať opačnú farbu kruhu, než akú vidí pred sebou a posádka sa aj v tomto prípade bezpečne dostane do lode.

Bodovanie:
správna reakcia posledného člena posádky – 2b.; využitie tejto získanej informácie prostredným členom – 1b.; vysvetlenie, ako ste k riešeniu dospeli – 1b.; pokrytie všetkých možných rozmiestnení farieb kruhov – 1b.

Úloha M5: Krabičky na bobule. *Opravoval Matěj Žídek.*

Najprv preskúmajme všetky siete, z ktorých sa dá poskladať kocka. Je ich **11** a vidíme ich na Obr. 1. Dalo sa na ne prísť napríklad nasledovným zamyslením a rozobraním možností:



Obr. 1

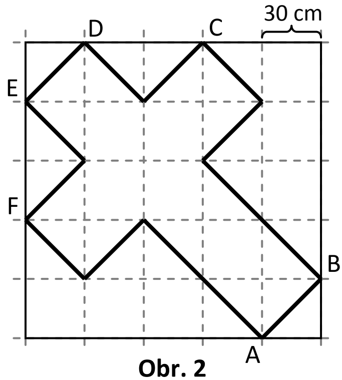
1. možnosť: ak najdlhší rad alebo stĺpec obsahuje 4 štvorce (na Obr. 1 krížiky). Zvyšné dva štvorce sa potom dajú doplniť 6 spôsobmi – dostaneme prvých 6 sietí ako na Obr. 1.

2. možnosť: ak najdlhší rad alebo stĺpec obsahuje 3 štvorce (na Obr. 1 krúžky). Zvyšné tri štvorce sa potom dajú doplniť 4 spôsobmi – ďalšie 4 siete na Obr. 1.

3. možnosť: ak najdlhší rad alebo stĺpec obsahuje 2 štvorce. Takáto možnosť je len jedna – posledná sieť na Obr. 1.

Siete, ktoré by vznikli iba otočením alebo preklopením uvedených, sme nepočítali.

Teraz sa pozrime na Laurin náčrt. Po chvíli námatkového skúšania, kreslenia a rysovania si všimneme, že Laurin náčrt sa presne „hodí“ na štvorčekový papier na 5×5 štvorčekov, ako na Obr. 2. Keďže vieme, že celý kartón má každú stranu dlhú 150 cm, môžeme vypočítať, že jeden malý štvorček na Obr. 2 predstavuje dĺžku strany 150/5 = 30 cm.



Obr. 2

No a tým pádom si už ľahko zistíme vzdialenosti bodov A, B, C, D, E, F od rohov kartóna.

Ostáva už iba spočítať obsah siete Laurinej kocky. Všimnime si, že jej hranice prechádzajú vždy cez uhlopriečky malých „pomocných“ štvorčekov, a teda delia tieto malé štvorčeky vždy na dva rovnaké trojuholníčky. Obsah malého štvorčeka poznáme: ten je 30 cm × 30 cm = 900 cm^2. Keď tento rozdelíme na dva rovnaké trojuholníčky, tak jeden trojuholníček musí mať obsah 900/2 = 450 cm^2. No a nie je nič ľahšie, ako na Obr. 2 spočítať, že Laurina sieť kocky obsahuje 5 celých pomocných štvorčekov a 14 malých trojuholníčkov. Jej obsah preto musí byť: (5·900) + (14·450) = **10 800 cm^2**.

Bodovanie:

všetky siete kocky – 1b. (mínus 0,1b. za každú chýbajúcu); narysovanie obrázku a popis konštrukcie – 1b.; určenie, kde sa nachádzajú body A, B, C, D, E, F – 1,5b.; vypočítanie obsahu siete – 1,5b.; ak ste namiesto presného výpočtu iba merali vzdialenosti na narysovanom obrázku, strhol som od 0,5 do 1b.