Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

33. ročník www.pikomat.sk školský rok 2015/2016

Vzorové riešenia 1. série, kategória 5–7

Úloha M1: Pečať. *Opravovala Alžbeta „Betka“ Bohiniková.*

	A	B	C
+	D	E	C
D	E	A	F

Sčítavame dve trojciferné čísla. Ako prvé si všimnime, čo by sa stalo, ak by sme sčítali najväčšie možné trojciferné čísla: 999 + 999 = 1998. Z toho hneď vyplýva, že cifra D môže byť jedine **D=1** a nič väčšie (nulu by sme na začiatok čísla nepísali). Tiež si ešte premyslime, aké výsledky vôbec môžeme dostať, keď sčítame dve cifry: Najmenšia možnosť je 0 (ak sčítame 0+0) a najväčšia možnosť je 18 (ak sčítame 9+9).

Teraz skúsime postupne dopĺňať cifry za písmená. Už vieme, že **D=1**, takže sčítanie A+D je vlastne A+1. Keďže celkový výsledok musí vyjsť štvorciferný, tak pri sčítaní A+1 musíme prenášať cez desiatku. Nesmieme však zabudnúť, že do každého sčítania môže ešte vstúpiť +1, ako prenos cez desiatku z predošlého sčítania. Dostávame tak dve možnosti:

1) Ak sa zo sčítania B+E neprenáša cez desiatku. V tomto prípade sčitujeme iba A+D+0 = A+1+0, a toto musí byť aspoň 10. Jediná možnosť je **A=9**, a následne z toho vyplýva **E=0**. Tým pádom sa nám sčítanie B+E mení na B+0, a z tohto má vyjsť 9. Avšak B už nemôže byť 9 (cifra 9 je už „obsadená“ pre A=9), a tak musí byť **B=8** a potrebujeme ešte zo sčítania C+C preniesť jednotku. To znamená, že C+C musí byť aspoň 10. Do úvahy pre C prichádzajú cifry 5, 6, 7, 8, 9. Vylúčime 8 a 9, lebo tie sme už použili. Vylúčime tiež 5, lebo 5+5=10 a F by muselo byť 0, no nulu sme už použili. Zostali nám dve riešenia, ktoré sú obe správne: buď **C=7** a **F=4**, alebo **C=6** a **F=2**.

2) Ak sa zo sčítania B+E prenáša cez desiatku V tomto prípade sčitujeme A+D+1 = A+1+1, a toto musí byť aspoň 10. Ak by bolo A=9, vyšiel by súčet 9+1+1=11. To by ale znamenalo E=1, čo nejde, lebo cifru 1 sme už použili pre D=1. Tým pádom musí byť **A=8**, a následne z toho vyplýva **E=0**. Teraz sčítanie B+E = B+0 má dať výsledok aspoň 10 (lebo sme si povedali, že rozoberáme prípad, keď sa z tohto sčítania pernáša cez desiatky) a končiť 8. To sa zjavne nedá dosiahnuť. Pre túto možnosť teda nevieme nájsť žiadne riešenie.

Dve riešenia, ako nahradiť písmená za cifry, sú:
1) A=9, B=8, C=7, D=1, E=0, F=4,
2) A=9, B=8, C=6, D=1, E=0, F=2.

Bodovanie:

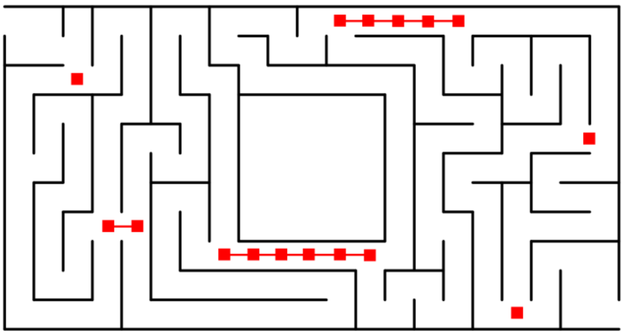
obe riešenia bez vysvetlenia – 2,5b.; jedno riešenie – 1 až 1,5b.; za chybičky a nepresnosti som strhávala 0,5 až 1b., podľa závažnosti.

Úloha M2: Cesta cez les. *Opravoval Samuel „Samko“ Cibulka.*

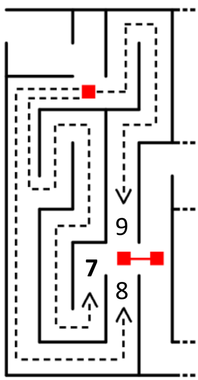
Poďme nájsť cestu cez les, ktorú keď dobrodruhovia prejdú, skončia čo najmenej dohryzení. Keď ju nájdeme, budeme vedieť odpovedať na obe otázky zo zadania. Ako sa ale takáto cesta hľadá? Mohli by sme preštudovať úplne všetky trasy, ktorými sa cez les dá prejsť. Tých je však stále príliš veľa na to, aby sme ich po jednej prechádzali a rátali na nich počty uhryznutí. Poďme skúsiť nájsť nejaký zlepšovák, ktorý nám uľahčí robotu.

Skúsme si tento veľký a výpočtovo náročný problém rozdeliť na viac menších problémov, ktoré vieme jednoducho riešiť. Pozrime sa na našu mapu a porozmýšľajme, ako by sme ju vedeli rozdeliť tak, že z najvýhodnejších ciest na jednotlivých kúskoch mapy by sme vedeli poskladať najvýhodnejšiu cestu na celej mape. Stačí si uvedomiť, že ak by boli na mape miesta, cez ktoré musí prechádzať každá trasa, tak presne v nich by sme mohli mapu rozdeliť. Predstav si napríklad, že by sme hľadali najkratšiu cestu z Bratislavy do Košíc cez Žilinu. Potom stačí nájsť najkratšiu cestu z Bratislavy do Žiliny a zo Žiliny do Košíc. Keď ich spojíme, tak dostanete hľadanú cestu. Poďme na mape zo zadania vyznačiť takéto miesta a volajme ich „mosty“ – Obr. 1.

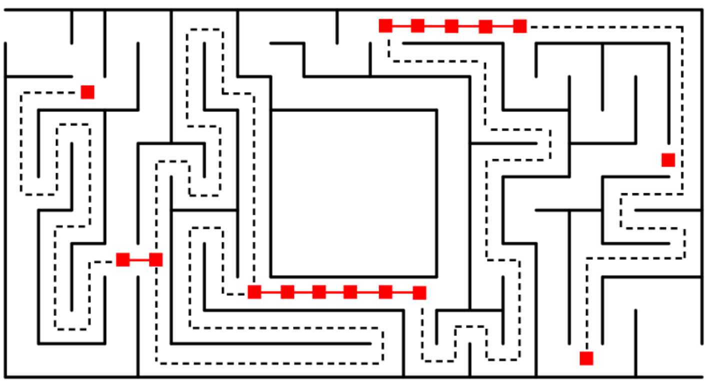
Teraz nám stačí už len nájsť najlepšie cesty na jednotlivých častiach mapy – vždy medzi dvoma mostami. To už nevieme spraviť lepšie, ako sa pozrieť na všetky cesty na týchto častiach. Napríklad prvý úsek sa dá prejsť troma spôsobmi. Pre každý tiež spočítame, koľko uhryznutí sa dobrodruhom ujde – Obr. 2.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Ďalej už nám neostáva iné, ako tento postup vykonať medzi každými dvoma po sebe idúcimi mostami a z každého úseku vybrať najbýhodnejšiu trasu. Keď potom pospájame všetky najlepšie úseky, dosatneme riešenie – najlepšiu cestu. Môžeme si všimnúť, že sme v skutočnosti dostali až dve možnosti – Obr. 3.

Našli sme cestu, na ktorej dobrodruhov čaká 35 uhryznutí (čo je menej ako 40). Tiež sme preverili všetky možnosti, preto vieme, že je to aj najmenší možný počet.

Bodovanie:
cesta na menej ako 40 uhryznutí – 1b.; najlepšia cesta na 35 uhryznutí – 1b.; ukázanie, že na menej ako 35 uhryznutí sa to nedá – 3b.

Úloha M3: Truhlica v rieke. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Ja som začal tak, že som si spravil tabuľku (tab. 1), ktoré vrecko čo obsahuje. Vy ste si ju spraviť nemuseli, ale mne sa to tak robí lepšie. A ešte som si spravil tabuľku, ktorý hrdina si zobral aké vrecká – zatiaľ prázdnu, postupne ju budeme dopĺňať (tab. 2). Pozrime sa, čo je v zadaní o tom, kto získal aké kamene.

	sma.	per.	rub.
zla.	2	1	-
str.	-	1	2
čer.	-	2	1

tabuľka 1.

Demirat mal najviac tri perly. Keďže v každom vrecku je aspoň jedna perla, nemohol si zobrať vrecko, kde je viac ako 1, lebo potom by mal viac ako 3 perly dokopy. Takže Demirat nemal červené vrecko.

Fred nemal žiadne smaragdy – teda nemal zlaté vrecká.

Severin mala presne 4 perly – to sa dá dosiahnuť len tak, že mala jedno červené vrecko (s dvomi perlami) a dve iné (každé s jednou perlou).

	Dem.	Fred	Sev.
zla.		0	
str.			
čer.	0		1

tab 2. po 3 krokoch

Pozrime sa teraz na tabuľku (tab 2. po 3 krokoch). V poslednom riadku to vyzerá, že **Fred** musel mať zvyšné 2 červené vrecká. Skontrolujeme to so zadaním, či to niečomu neprotirečí. Smaragdy mu to nepridáva, zatiaľ je to OK.

Teraz v strednom stĺpci vidíme, že **Fred** musel mať aj jedno strieborné vrecko. To sedí – má mať najmenej 3 rubíny a má 4.

	Dem.	Fred	Sev.
zla.	1	0	2
str.	2	1	0
čer.	0	2	1

tabuľka 2 - vyplnená.

Pozrime sa na **Severin**. Vraj má najviac dva rubíny. Jeden sme jej už priradili v červenom vrecku, takže už jej nemôžeme dať strieborné vrecko, leby už by mala tri rubíny. Severin teda bude mať dve zlaté vrecká.

Demiratovi ostane jedno zlaté a dve strieborné vrecká. Skontrolujeme so zadaním, či má najmenej dva smaragdy (má 2, to je dobre) a najviac tri perly (má 3, to je dobre).

Ta-dá! Máme vyplnenú tabuľku, kto má koľko ktorých vrecúšok, a to je riešenie tejto úlohy. Keďže každý krok, ktorý sme robili, bol logicky zdôvodnený (t.j. nie „vyskúšam jednu z veľa možností a vyšlo to“), tak je to jediné riešenie (aj keď ste sa k nemu mohli dopracovať viacerými spôsobmi).

Bodovanie:
samotnú odpoveď / tabuľka bez popisu postupu – 2b.; keďže sa dalo riešiť rôznymi spôsobmi (v zadaní bolo viac tvrdení, ako sme v skutočnosti použili), body za postup závisia od toho, ako dobre ste vysvetlili ten svoj.

Poznámka:
Tým, že sme mali viac tvrdení, ako sme použili), museli sme tie zvyšné overiť, či sedia, či si s niečím neprotirečia. Keďže máme ešte len prvú sériu, tak za neoverenie som v takomto prípade strhával len pol boda, ale dávajte si na to pozor, môže sa stať, že by to nesedelo, a museli by sme konštatovať, že úloha nemá riešenie.

Úloha M4: Fladnagov talizman. *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková.*

Najskôr zistíme, ako mohol Fladnag priradiť čísla stenám veľkej kocky. Vieme, že súčet čísel na protiľahlých stenách je 7. Oproti sebe teda museli byť tieto dvojice čísel: 1 a 6, 2 a 5, 3 a 4.

Rozdeľme veľkú kocku na 64 malých kocočiek. Počet čísel na malej kocočke môže byť rôzny, podľa toho, kde sa nachádzala v rámci pôvodnej veľkej kocky. Ak bola vo vrchole veľkej kocky, budú na nej 3 čísla; ak bola na hrane veľkej kocky, budú na nej 2 čísla; ak bola uprostred steny veľkej kocky, bude na nej 1 číslo; ak sa nachádzala vo vnútri veľkej kocky, nebude na nej žiadne číslo. Je zrejmé, že čísla na jednej malej kocočke (ak je ich tam viac) musia byť všetky rôzne.

Všimnime si, že stena s číslom 1 susedí so všetkými ďalšími stenami okrem steny oproti s číslom 6. Teda na kocočke, na ktorej sú dve čísla, može byť jednotka a ľubovoľné iné číslo rôzne od 6. Podobne to platí aj pre ostatné čísla. Takže na kocočke môžu byť ľubovoľné tri čísla, z ktorých sa žiadne dve nenachádzajú na protiľahlých stenách.

Už stačí iba rozobrať, akým spôsobom vieme jednotlivé súčty na malej kocočke dostať. Rozoberieme ich podľa počtu čísel na kocočke. To, či tam kocočku s takými číslami nájdeme, už overíme ľahko.

Súčet 2: Jedno číslo: 2. Takéto kocočky tam sú 4. Dve čísla: 1+1. Kocočka však nemôže mať dve rovnaké čísla. Tri čísla: nedá sa.

Súčet 6: Jedno číslo: 6. Také sú 4 kocočky. Dve čísla: 1+5 alebo 2+4. Každá takáto dvojica sa tam nachádza 2-krát, takže takéto sú 4 kocočky. Tri čísla: 1+2+3. Takáto je 1 kocočka.

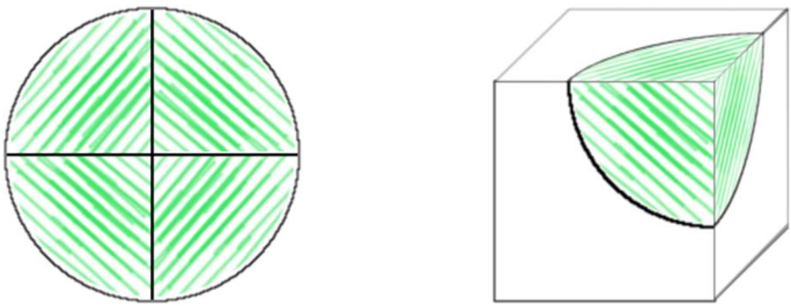
Najväčší súčet dostaneme tak, že sčítame 3 najväčie čísla (viac čísiel na jednej kocočke nemôže byť): 4+5+6 = 15. Takáto kocočka sa nachádza vo vrchole, kde sa stretávajú steny veľkej kocky s číslami 4, 5, 6.

Súčet 2 je na štyroch kocočkách. Súčet 6 je na deviatich kocočkách. Najväčší možný súčet na malej kocočke je 15.

Bodovanie:
ak chýbala kocočka 1+2+3 (najčastejšia chyba) – mínus 0,5–1b.; ak boli nesprávne uvedené počty kocočiek s číslami 2+4 alebo 1+5 – mínus 0,5–1b.; za nesprávny alebo chýbajúci maximály súčet 15 (a tiež počet kocočiek s týmto súčtom) – mínus 0,5–1b.

Úloha M5: Prikované triaglumy. *Opravoval Matej „Zajo“ Králik.*

V tejto úlohe je veľmi dôležité, spojiť si všetky vety zo zadania a správne si predstaviť polohu jednotlivých triaglúm. My si ju ukážeme na dvoch obrázkoch.



Prvá triagluma sa vie plaziť v kruhu okolo oka, o ktoré je prikovaná. Tento kruh sa skladá zo 4 štvrťkruhov. Druhá sa vie plaziť po dvoch zvislých stenách kocky a po vrchnej stene kocky, lebo je prikovaná o jej roh. Na každej z týchto stien sa vie plaziť po ploche v tvare štvrťkruhu.

Podľa zadania sú obe reťaze rovnako dlhé, a tým pádom sú štvrťkruhy jednej aj druhej triaglumy rovnako veľké. Prvá má preto väčšiu plochu na pohyb o jeden štvrťkruh. Pomer týchto plôch je 4 štvrťkruhy ku 3 štvrťkruhom, teda 4:3.

Bodovanie:
správne odôvodnený a kompletný postup s výsledkom – 5b.; ak ste nevysvetlili alebo nesprávne vysvetlili časti svojho postupu – 3,5–4,5b.; hranica medzi polbodmi od 3,5 do 5 bodov bola naozaj tenká, často mohlo ísť iba o niekoľko slov alebo o kontext, v ktorom ste niečo podali; ak ste napísali iba výsledok (podľa toho, ako ste ho popísali) – 0,5–1,5b.