Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

33. ročník www.pikomat.sk školský rok 2015/2016

Vzorové riešenia 2. série, kategória 5–7

Úloha M1: Severinin sen. *Opravovala Kristína „Kika“ Prešinská.*

Označme si zvieratká podľa ich prvých písmen, teda: K, S, P, Ť, L a O a miesta, na ktorých tancujú číslami 1 až 6, pričom najbližšie k Severin bude miesto 1. Vieme, že koník je bližšie ako lamička, teda K<L. Ďalej poník je bližšie ako ťavička, teda P<Ť. O lamičke ešte vieme, že tancovala tri miesta za poníkom, teda L–3=P. Posledná informácia nám hovorí, že ovečka tancovala štyri miesta pred somárikom, teda O+4=S. Najprv sa zamyslime nad poslednou podmienkou, pretože pri nej je asi najmenej možností, ako ju splniť.

Ak by bola O na prvom mieste... Vtedy S musí byť na piatom (O+4=S). Ďalej L musí byť o tri miesta za P. Keďže ale O a S už sú umiestnené, tak L a P majú jedinú možnosť, kam sa zmestiť: a to L na poslednom mieste a P na treťom (ak by bol P na inom mieste, tak pozícia pre L by už bola obsadená). Už musíme iba zistiť, kde tancovali K a Ť. Vieme, že Ť je za P, jediné ešte voľné miesto za P je na štvrtom mieste, takže tam musela tancovať Ť. Pre K nám zostala už len jedna pozícia, a to na druhom mieste. Táto pozícia vyhovuje aj podmienke, že K<L. Takto sú splnené všetky podmienky, teda tak zvieratká mohli tancovať. Zvieratká teda môžu byť zoradené nasledovne: **O-K-P-Ť-S-L**.

Ak by bola O na druhom mieste... Vtedy S musí byť na šiestom (poslednom). Podobne ako v predošlom odseku, aby L bolo o tri miesta za P, môžu byť jedine P na prvom mieste a L na štvrtom (ak by bol P na inom mieste, tak pozícia pre L by už bola obsadená). Ešte treba zoradiť K a Ť. Aby bola splnená podmienka K<L, tak K musí byť na treťom mieste, pretože žiadne iné pred L už voľné nie je. Pre Ť nám zostalo už len piate miesto. Keď je Ť na piatom mieste, je splnená aj podmienka P<Ť. Sú splnené všetky podmienky, teda zvieratká mohli byť zoradené aj takto: P-O-K-L-Ť-S.

Ak by bola O na treťom alebo ktoromkoľvek vzdialenejšom mieste... Vtedy by S musel byť na siedmom mieste, ale počkať, počkať, taká pozícia predsa už nie je! Zvieratiek je len 6, a teda môže byť maximálne na šiestom mieste. Preto ak by bola O na treťom alebo ktoromkoľvek ďalšom mieste, tak by nám S vyšiel na neexistujúce miesto. Preto O nemôže byť na inom ako prvom alebo druhom mieste.

Preskúmali sme všetky možnosti, kde mohla tancovať ovečka a následne priradili ostatným zvieratkám všetky možné pozície, ktoré spĺňali podmienky zo zadania. Tým pádom sme našli všetky možné usporiadania zvieratiek – všetky riešenia úlohy. Sú to tieto dve: **O-K-P-Ť-S-L** a **P-O-K-L-Ť-S**.

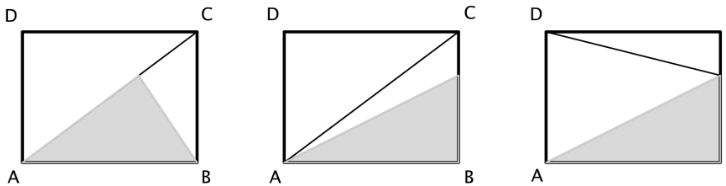
Bodovanie:
každé nájdené riešenie – 1,5b.; vysvetlenie systému hľadania riešení – 1b.; zdôvodnenie, že iné riešenia nie sú – 1b.

Úloha M2: Koláč. *Opravoval Pavol „Tamarka“ Hronský.*

Koláč mal rozmery 30 cm × 40 cm a jeho celková plocha teda bola 1200 cm^2. Úlohou bolo rozdeliť koláč na tri trojuholníky tak, aby sa plocha jedného z týchto trojuholníkov rovnala polovici súčtu plôch zvyšných dvoch trojuholníkov. Z toho vyplýva, že jeden trojuholník musí mať plochu rovnú jednej tretine z plochy koláča, teda 400 cm^2. Pre úplnosť si povedzme, že plocha trojuholníka sa počíta ako polovica zo súčinu dĺžky základne a výšky na túto základňu. Poďme sa pozrieť, ako takýto trojuholník zostrojiť.

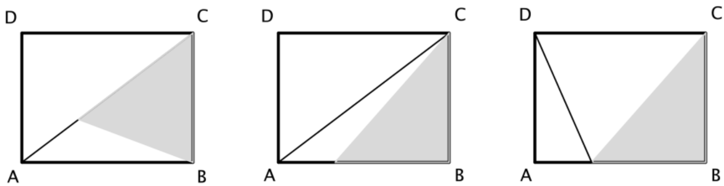
1) Zvoľme si najskôr ako základňu stranu AB s dĺžkou 40 cm. Aby mal trojuholník potrebný obsah (400 cm^2), jeho výška musí byť 20 cm. Bodov, ktoré sú vzdialené od strany AB presne 20 cm, je v danom obdĺžniku nekonečne veľa. Avšak musíme pamätať na to, že zo zvyšku koláča potrebujeme vykrojiť ešte ďalšie dva trojuholníky. Preto vrchol trojuholníka s plochou 400 cm^2 bude ležať buď na niektorej kratšej strane obdĺžnika, alebo na jeho uhlopriečke. K takýmto trojuholníkom existujú 3 rôzne spôsoby rozrezania (Obr. 1). Všimnite si, že tento postup by sme mohli aplikovať aj na druhej strane obdĺžnika, avšak to by nám vznikli v podstate rovnaké, iba zrkadlovo preklopené riešenia.

Obr. 1



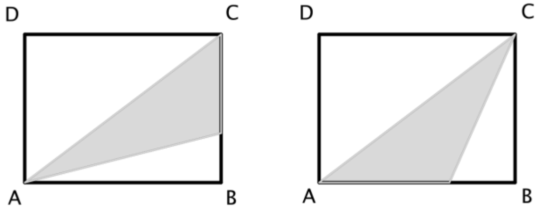
2) Podobne ako v predchádzajúcom bode si zvolíme najskôr základňu. Teraz ňou bude strana BC s dĺžkou 30 cm. Aby mal takýto trojuholník plochu 400 cm^2, musí mať výšku rovnú 80/3 cm. Zo všetkých bodov, ktoré sú vzdialené 80/3 cm od základne, opäť vyberieme len ten na dlhšej strane alebo ten na uhlopriečke – aby sme zvyšnú časť koláča mohli rozdeliť na dva trojuholníky. Aj tu sú 3 rôzne spôsoby rozrezania (Obr. 2).

Obr. 2



3) Zatiaľ sme rozobrali iba prípady, kedy trojuholník s plochou 400 cm^2 mal jednu stranu zhodnú so stranou obdĺžnika. Ostávajú však ešte dve ďalšie možnosti. Pri nich využijeme to, že výška na stranu trojuholníka sa nemusí nutne s danou stranou pretínať. A preto aj takto zkonštruované trojuholníky majú obsah 400 cm^2 (Obr. 3).

Obr. 3



Ukázali sme si všetky možnosti, akými sa daný koláč dá nakrájať. Samozrejme, trojuholník s plochou 400 cm^2 by sme mohli skúsiť vyrezať aj tak, že sa nebude dotýkať žiadnej zo strán, alebo sa bude dotýkať len vo vrcholoch. Avšak vtedy nie je možné zvyšok koláča rozrezať na dva trojuholníky.

Preto zadaniu úlohy vyhovuje iba uvedených 8 riešení. Rovnako tak si všimnime, že zvyšné dva trojuholníky majú v každom riešení totožné obsahy: 200 cm^2 a 600 cm^2.

Bodovanie:
nájdenie všetkých 8 možností – 2,5b.; veľkosti plôch všetkých vzniknutých trojuholníkov – 1,5b.; odpoveď na záver – 0,5b.; popis riešenia – 0,5b.

Úloha M3: Na upokojenie. *Opravoval Peter „Peťo“ Dupej.*

Zopakujme si, čo vieme zo zadania. Demirat si vymyslel 2 po sebe idúce čísla od 1 do 10, a potom jedno povedal Severin a druhé Fredovi. Severin a Fred teda vedia, že číslo toho druhého je buď o jedna väčšie, alebo o jedna menšie ako to ich. Avšak to, že Demirat povie jedno číslo Severin a druhé Fredovi, neznamená, že druhé je väčšie ako prvé. Inak by predsa Severin aj Fred hneď vedeli, aké má ten druhý číslo.

Samozrejme tiež predpokladáme, že obaja sa snažia rozmýšľať najlepšie ako vedia a neklamú. To znamená, že ak by Severin mala číslo 1, určite by hneď povedala, že vie, že Fred má číslo 2, lebo menšie ako 1 mať nemôže. To isté by platilo, ak by mala číslo 10, lebo by vedela, že Fred musí mať číslo 9. Preto môžeme vylúčiť, že by Severin mala čísla 1 alebo 10.

Fred teda vie, že Severin nemá ani 1, ani 10, ale stále nevie zo svojho čísla usúdiť, aké číslo má Severin. To znamená, že tiež nemá ani 1, ani 10, lebo inak by ihneď vedel, že Severin musí mať 2 alebo 9. Okrem toho však Fred v tejto situácii už nemôže mať ani 2 alebo 9, pretože inak by vedel, že Severin musí mať 3 alebo 8, pretože Severin nemôže mať rovnaké číslo ako Fred a z jej prvého tvrdenia vieme, že nemá ani 1 a 10.

Po tom, čo Fred povie, že tiež nevie, aké ma Severin číslo, Severin povie, že už vie, aké má Fred číslo. To znamená, že musí mať 2, 3, 8 alebo 9. Ak má Severin 2, vie, že Fred musí mať 3, lebo 1 mať nemôže. Ak má 3, vie, že Fred musí mať 4, lebo 2 mať nemôže. Podobne vie aj pre čísla 8 a 9, že Fred musí mať 7 alebo 8.

To znamená, že Demirat si mohol myslieť iba 4 možné dvojice po sebe idúcich čísel od 1 do 10, a to dvojice **2-3**, **3-4**, **7-8** alebo **8-9**.

Bodovanie:
všetky 4 správne riešenia s logickým vysvetlením – 5b.; ak ste zabudli, že Fred nemohol mať ani 2 ani 9, a teda Severin mohla mať aj 3 alebo 8 – 3b.; ak ste iba vypísali všetkých 9 resp. 18 možností, či inak nepochopili zadanie, musel som udeliť 0b.

Úloha M4: Vežička. *Opravoval Matej „Zajo“ Králik.*

Našou úlohou je pomôcť Fredovi, ktorý pozná záhadné číslo Č a snaží sa zistiť dĺžky strán jednotlivých poschodí vežičky. Keďže tieto dĺžky zatiaľ nepoznáme, označme si ich písmenami. Dĺžku strany druhého poschodia vežičky si označme n. Zo zadania vieme, že strana prvého poschodia je o jednu kocku dlhšia, preto je jej dĺžka $n+1$. Strana tretieho poschodia je zase o jednu kocku kratšia, preto je jej dĺžka $n-1$. Poschodia vežičky sú štvorcové, preto sa prvé poschodie skladá z $(n+1)^2$ kocočiek, druhé poschodie sa skladá z n^2 kocočiek a tretie poschodie sa skladá z $(n-1)^2$ kocočiek.

Teraz, keď už vieme, z koľkých kocočiek sa skladajú jednotlivé poschodia, môžeme vypočítať číslo Č. Zo zadania vieme, že to je rozdiel počtu kocočiek v 1. a 2. poschodí (prvá hranatá zátvorka), plus rozdiel počtu kocočiek v 1. a 3. poschodí (druhá hranatá zátvorka), plus rozdiel počtu kocočiek v 2. a 3. poschodí (tretia hranatá zátvorka).

$$Č = [(n+1)^2 - n^2] + [(n+1)^2 - (n-1)^2] + [n^2 - (n-1)^2]$$

Keď v tejto rovnici všetky zátvorky roznásobíme, odčítame čo sa dá odčítať a sčítame čo sa dá sčítať, ostane nám už iba jednoduchý tvar:

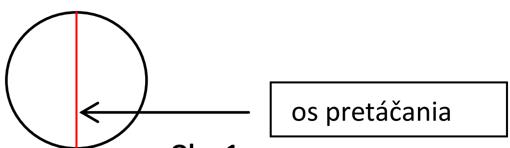
$$Č = 8n$$

Z tejto rovnice už Fred vie veľmi ľahko zistiť dĺžky strán jednotlivých poschodí vežičky. Stačí, keď číslo Č, ktoré sa dozvedel od Severin, vydelí ôsmimi a má dĺžku strany druhého poschodia. Keď k nemu pripočíta jednotku, dostane dĺžku strany prvého poschodia a keď jednotku odpočíta, dostane dĺžku strany tretieho poschodia.

Bodovanie:
riešenie na konkrétnych prípadoch a pozorovanie, že Č sa zväčšuje 8-krát viac ako strana stavby s dostatočným popisom – 2b.; prechod k všeobecnému vyjadreniu Č pomocou strany stavby – 1,5b.; správny záver a úprava vyjadrenia pre ľubovoľné Č – 1,5b.

Úloha M5: Plavba. *Opravovala Michaela „Miški“ Zatrochová.*

V prvom rade je potrebné si uvedomiť, čo to znamená, že videl odraz v zrkadle. Pri hodinkách to znamená to, že obe ručičky vidíme „prevrátené“ podľa osi, ktorá spája 12 a 6 (Obr. 1). Napríklad ak niektorá ručička v skutočnosti ukazuje na číslo 10, tak v zrkadlovom odraze bude ukazovať na číslo 2. Ďalej si treba uvedomiť, že ak ručička ukazuje na 12 alebo 6, tak sa nachádza presne na tejto osi.

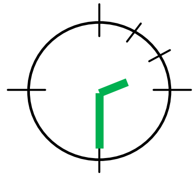


Obr. 1

Zo zadania vieme, že Fred videl začiatočný čas ako odraz v zrkadle a následná plavba trvala 20 minút. Konečný čas bol potom posunutý o 2,5 hodiny oproti (zrkadlovému) začiatočnému. Z toho vyplýva, že na začiatku plavby rozdiel medzi skutočným časom a časom v zrkadle bol 2 hodiny a 10 minút – odpočítali sme trvanie plavby.

Musíme však rozlíšiť dva prípady podľa toho, ako chápeme pohyb hodinovej ručičky.

1) Ak predpokladáme, že hodinová ručička sa hýbe aj počas trvania hodiny. Napríklad, že o pol tretej ukazuje hodinová ručička presne do stredu medzi čísla 2 a 3 (Obr. 2).

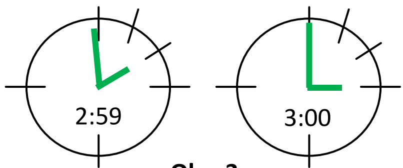


Obr. 2

V tomto prípade ručičky posúvame symetricky podľa času 12:00 a 6:00. Symetricky znamená, že rozdiel medzi časmi (zrkadlovým a skutočným), teda 2 hodiny 10 minút rozdelíme na dvakrát 1 hodinu a 5 minút. Čiže 12:00 + 1:05 = 13:05 a jeho odraz je 12:00 – 1:05 = 10:55. Čas v zrkadle je 10:55, v skutočnosti je 13:05 a na druhý breh doplávali 13:25. To isté spravíme aj pri čase 6:00. Teda prirátame 1:05 a dostaneme 7:05, čo je reálny čas a Fred videl v zrkadle 6:00 – 1:05 = 4:55. Čas príchodu na druhý breh je v tomto prípade 7:25.

2) Ak predpokladáme, že hodinová ručička stojí na mieste až po moment, kedy nastáva celá hodina a vtedy „preskočí" o celý jeden dielik na hodinkách. Napr. ako na Obr. 3.

V tomto prípade nájdeme ďalšie dve riešenia, ktoré sú symetrické podľa časov 12:30 a 6:30. Vypočítame to rovnako. 12:30 + 1:05 = 13:35, odraz je 11:25 a čas príchodu na druhý breh je 13:55. Posledná možnosť: 6:30 + 1:05 = 7:35, odraz 5:25 a reálny čas príchodu je 7:55.



Obr. 3

Ak by sme chceli zohľadniť aj to, že čas na ručičkových hodinkách môže byť aj doobeda aj poobede (napr. že 13:05 je aj 1:05), tak naši hrdinovia mohli doraziť na druhý breh v týchto časoch: 13:25; 1:25; 7:25; 19:25; 13:55; 1:55; 7:55; 19:55.

Bodovanie:

časový rozdiel 2 hod. 10 min. – 1b.; postup so symetriou podľa časov 12:00, 6:00, 12:30, 6:30 – 2b.; nájdenie dvoch vyhovujúcich riešení – 2b.