Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

33. ročník www.pikomat.sk školský rok 2015/2016

Vzorové riešenia 3. série, kategória 5–7

Úloha M1: Kúzelné schodisko. *Opravovala Simona „Simča" Galková.*

V tejto úlohe chceme nájsť počet spôsobov, akými vieme prejsť schodisko. Každý škriatok začína na schode 0 a každý škriatok stúpi aj na schod 6, keďže schod 6 predstavuje už chodbu, po ktorej škriatkovia kráčajú ďalej. Škriatkovia môžu urobiť kroky dĺžky 1, 2, alebo 3. Hľadáme teda rôzne kombinácie čísel 1, 2, 3, ktorých súčet je 6. Čísla v súčte sa môžu opakovať a na poradí záleži.

Väčšina z Vás riešila úlohu vypísaním všetkých možností, ako mohli škriatkovia schodisko prejsť. Pri taktomto riešení je dôležité zvoliť si správny systém vypisovania možností, aby ste si boli istí, že ste na žiadnu možnosť nezabudli. Možností, ako prejsť schodisko, je 24, teda za jeden deň sa do jaskyne mohlo dostať najviac 24 škriatkov. Sú to tieto možnosti (píšeme, aké kroky škriatok spraví):

111111,
11112, 11121, 11211, 12111, 21111,
1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211,
222,
1113, 1131, 1311, 3111,
33,
123, 132, 213, 231, 321, 312

n	počet možností
1	1
2	2
3	4
4	1+2+4=7
5	2+4+7=13
6	4+7+13=24

Druhá možnosť, ako vyriešiť úlohu, bolo nasledujúcou úvahou všeobecne pre n schodov. Začnime pre n=1, teda jediný schod. Tam je len jedna možnosť, ako ho prejsť. Ak by bolo n=2 schody, sú to dve možnosti (11 a 2). Pri n=3 sú možnosti 4 (111, 12, 21, 3). Keďže môžeme robiť kroky dlĺžky maximálne 3, možnosti sa budú po trojiciach opakovať, teda pre n=4 stačí zrátať všetky 3 predchádzajúce možnosti, pretože či skončíme na schode 1, 2, alebo 3, vždy sa vieme dostať na schod 4 urobením kroku o veľkosti 3, 2, alebo 1. Ak možnosti vypíšeme, vidíme, že sa opakujú ak si odmyslíme posledný krok stúpenie na schod 4 (**1**3, **11**2, **2**2, **111**1, **12**1, **21**1, **3**1). Podobne pre každé ďalšie n, stačí teda zrátať možnosti pre predchádzajúce tri schody, čiže n–1, n–2 a n–3. Teda ak vieme počty možností pre n=1, 2 a 3, vieme doplniť celú tabuľku.

Poznámka:

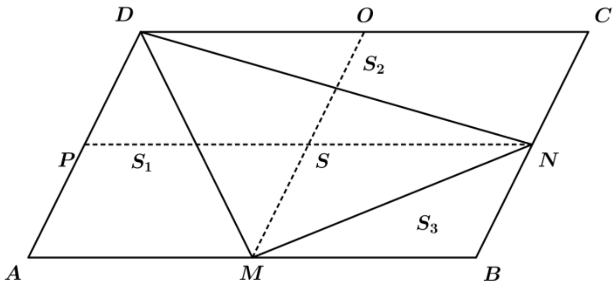
V tejto úlohe sa vyskytli nejasnosti – niektorí z vás uvažovali, že škriatkovia nemusia stúpiť vždy na šiesty schod, ale stačí im skončiť na schode 4, 5, alebo 6 a potom “zoskočia” dolu na chodbu a pôjdu ďalej. Uvažovali ste teda akoby 7 schodov. Spôsob riešenia tohto zadania je rovnaký a teda ak ste uvažovali takto a príklad ste mali vyriešený správne, mohli ste získať 5 bodov.

Bodovanie:

výsledok – 1b.; postup – 1b.; nájdenie všetkých možností – 3b.; jedna chýbajúca možnosť – mínus 0,5b.; každá ďaľšia chýbajúca možnosť – mínus 0,2b.

Úloha M2: Miestnosť. *Opravovala Ľudmila „Ľudka“ Šimková.*

Nakreslime si rovnobežník *ABCD*. Chceme zistiť, akú časť pokrýva trojuholník *DMN*, kde *M* je stred strany *AB* a *N* stred strany *BC*. Pre nás je jednoduchšie zistiť, akú časť pokrývajú trojuholníky *ABD*, *DNC* a *MBN* s obsahmi S_1, S_2 a S_3 (obrázok). Zvyšnú čast pokrýva trojuholník *DMN*.



Dokreslime si strednú priečku *MO*. Rovnobežník *ABCD* nám rozdelí na dva menšie rovnobežníky s polovičným obsahom. Rovnobežník *AMOD* ešte rozdelíme uhlopriečkou *DM* na dva rovnaké trojuholníky. Obsah S_1 je teda 1/4 z celého rovnobežníka. Dokreslením strednej priečky *PN* môžeme vidieť, že aj S_2 je 1/4 z celého rovnobežníka. Stredné priečky nám vytvorili 4 rovnaké rovnobežníky so štvrtinovým obsahom. Rovnobežník *MBNS* ešte uhlopriečkou *MN* rozdelíme na polovice, takže S_3 má obsah 1/8 z celého rovnobežníka.

Neosvetlená časť rovnobežníka zaberá $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$, a teda osvetlený trojuholník zaberá 3/8 miestnosti.

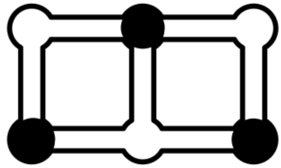
Poznámka:

Viacerí z Vás úlohu vyriešili len pre štvorec alebo obdĺžnik. Tým, že sme v zadaní uviedli rovnobežník sme chceli, aby ste to ukázali pre ľubovoľný typ. Vtedy si nestačí vybrať jeden (napríklad štvorec) a ukázať to preň. Body som udeľovala podľa toho, či sa Váš postup dal použiť i pre rovnobežník.

Bodovanie:

výsledok – 1b.; riešenie iba pre štvorec – 2 až 2,5b.; riešenie pre štvorec a obdĺžnik, ktoré sa dá podobne použiť i pre rovnobežník – 4b.; ak ste obsah vyjadrovali pre konkrétne rozmery obdĺžnika – mínus 0,5b.

Úloha M3: Naháňačka. *Opravoval Juraj „Juro“ Pavlovič.*



Vyfarbime si chlieviky v bludisku ako šachovnicu (obrázok). Všimnime si, že z ktoréhokoľvek čierneho chlievika sa dá dostať len do bieleho a tiež naopak, z ktoréhokoľvek bieleho chlievika sa dá dostať len do čierneho. Tým pádom pri každom presune tak mravec, ako aj chrobák vždy zmenia farbu svojho chlievika na opačnú.

To je pre mravca veľmi dobrá správa! Prečo? Pretože to znamená, že mravec sa vždy po svojom ťahu ocitne na rovnakej farbe ako chrobák. No a my už vieme, že sa nedá spraviť ťah z jednej farby na tú istú. Tým pádom chrobák nikdy nebude môcť spraviť taký ťah, aby sa stretol s mravcom (taký ťah by mohol spraviť jedine mravec, ale nie je sprostý ☺).

Mravec môže utekať donekonečna, stačí, ak sám od seba nevbehne ku chrobákovi.

Bodovanie:
akýkoľvek správny dôkaz – 5b.; vyskúšanie zopár konkrétnych pohybov v bludisku a prehlásenie, že môže unikať donekonečna – okolo 2,5b.

Úloha M4: Perly. *Opravoval Pavol „Tamarka“ Hronský.*

Zaujíma nás hmotnosť prostrednej perly. Zatiaľ je táto hmotnosť neznáma, a preto jej hodnotu budeme uvažovať ako x gramov. Neznáma x predstavuje ľubovoľné kladné číslo (nulová alebo záporná hmotnosť neexistuje) menšie ako 650 (jedna perla isto nie je ťažšia ako celý náhrdelník).

Zo zadania vieme, že hmotnosť perál od strednej do jedného konca (povedzme že ľavého) sa znižovala po 1 grame a na druhú stranu (pravú) sa hmotnosť perál znižovala po 1,5 grame. Pomocou tejto informácie vieme vyjadriť hmotnosť každej jednej perly na náhrdelníku v závislosti od hmotnosti tej strednej. Perla o jednu doľava od stredu má hmotnosť (x–1) gramov, ďalšia vedľa nej (x–2) gramov a takto to ide až po poslednú perlu na ľavom konci, ktorá má hmotnosť (x–16) gramov.

To isté vieme spraviť aj na pravú stranu. Prvá perla napravo od strednej má hmotnosť (x–1,5) gramu, druhá (x–3) gramy a tak ďalej až po poslednú, ktorá má hmotnosť (x–24) gramov. Keď všetky tieto hmotnosti spočítame, dostaneme: $\mathbf{(x-16) + (x-15) + \ldots + (x-2) + (x-1) + x + (x-1{,}5) + (x-3) + \ldots + (x-22{,}5) + (x-24) = 33 \cdot x - 340}$. Výraz $\mathbf{33 \cdot x - 340}$ je vyjadrenie hmotnosti náhrdelníka v závislosti od neznámej hmotnosti prostrednej perly. Ale my predsa vieme, koľko celý náhrdelník vážil! Preto môžeme napísať rovnosť:

$$\mathbf{33 \cdot x - 340 = 650}.$$

Už poľahky určíme, že $\mathbf{x = 30}$. **Prostredná perla na náhrdelníku vážila presne 30 gramov.**

Bodovanie:
výsledok – 1b.; akýkoľvek správny postup vedúci k riešeniu – 4b.

Úloha M5: Príklady. *Opravoval Pavol „Tamarka“ Hronský*.

Začnime otázkou o vzťahu medzi ciframi týchto čísel. Vezmime si dve úplne všeobecné dvojciferné čísla AB a CD. Určite ste už v škole videli, že číslo AB vieme rozpísať ako (10×A+B) a číslo CD ako (10×C+D). Hľadáme také čísla, pre ktoré platí: AB×CD = BA×DC. Rozpíšme si to, či nenájdeme niečo zaujímavé:

$$(10\times A+B)\times(10\times C+D) = (10\times B+A)\times(10\times D+C),$$

$$100\times A\times C+10\times A\times D+10\times B\times C+B\times D = 100\times B\times D+10\times B\times C+10\times A\times D+A\times C.$$

Úpravami na obidvoch stranách rovnice dostaneme

$$99\times A\times C = 99\times B\times D,$$

teda aby AB×CD sa rovnalo BA×DC, musí platiť, že

$$A\times C=B\times D.$$

Keď už vieme, čo musí platiť, aby sme dostali rovnaké výsledky po vymenení cifier v číslach, musíme už len nájsť všetky riešenia. Ja osobne aby som sa nestratil pri hľadaní, som zvolil stratégiu hľadania čísel A, B, C a D tak, aby vyhovovalo A×C=B×D. Až následne som vytvoril príklady zobrazené v tabuľke na samostatnej strane.

Bodovanie:
odpoveď – 0,5b.; správne popísaný a vysvetlený vzťah medzi ciframi príkladov – 2,5b.; vypísanie konkrétnych príkladov – 2,5b.

Tabuľka k úlohe M5

	A	C	B	D
1	1	4	2	2
2	1	6	2	3
3	1	6	3	2
4	1	8	2	4
5	1	8	4	2
6	1	9	3	3
7	2	2	4	1
8	2	3	1	6
9	2	3	6	1
10	2	4	1	8
11	2	4	8	1
12	2	6	3	4
13	2	6	4	3
14	2	8	4	4
15	2	9	3	6
16	2	9	6	3
17	3	3	1	9
18	3	4	2	6
19	3	4	6	2
20	3	6	2	9
21	3	6	9	2
22	3	8	4	6
23	3	8	6	4
24	4	4	8	2
25	4	6	3	8
26	4	6	8	3
27	4	9	6	6
28	6	6	4	9

AB	CD	AB×CD	BA×DC	BA	DC
12	42	504	504	21	24
12	63	756	756	21	36
13	62	806	806	31	26
12	84	1008	1008	21	48
14	82	1148	1148	41	28
13	93	1209	1209	31	39
24	21	504	504	42	12
21	36	756	756	12	63
26	31	806	806	62	13
21	48	1008	1008	12	84
28	41	1148	1148	82	14
23	64	1472	1472	32	46
24	63	1512	1512	42	36
24	84	2016	2016	42	48
23	96	2208	2208	32	69
26	93	2418	2418	62	39
31	39	1209	1209	13	93
32	46	1472	1472	23	64
36	42	1512	1512	63	24
32	69	2208	2208	23	96
39	62	2418	2418	93	26
34	86	2924	2924	43	68
36	84	3024	3024	63	48
48	42	2016	2016	84	24
43	68	2924	2924	34	86
48	63	3024	3024	84	36
46	96	4416	4416	64	69
64	69	4416	4416	46	96