Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

33. ročník www.pikomat.sk školský rok 2015/2016

Vzorové riešenia 4. série, kategória 5–7

Úloha M1: Kokosy. *Opravovala Simona „Simča“ Galková.*

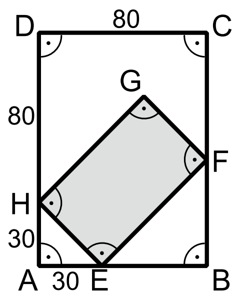
Ako prvé si uvedomíme, že sa budú striedať párne a nepárne počty kokosov na kokosovníkoch. Ak bude na prvom kokosovníku *párny* počet kokosov, na ďalšom bude o 1 menej alebo o 1 viac, ale určite bude tento počet *nepárny*. Na ďalšom bude počet opäť párny, potom nepárny atď. Každopádne bude na šiestich kokosovníkoch párny počet kokosov a na šiestich kokosovníkoch nepárny počet kokosov. Súčet 6 párnych a 6 nepárnych čísel je párne číslo. Preto to 1999 určite nebolo, zatiaľ čo 2000 to byť mohlo.

Už stačí len nájsť konkrétny prípad, ako to mohlo byť. Niektorí z Vás to skúšali a postupným uberaním či pridávaním kokosov našli niektorú z mnohých správnych možností. Väčšina si však vypočítala priemerný počet kokosov na kokosovníku, čo je približne 2000:12 = 166,67, a potom hľadala vyhovujúce rozdelenie niekde v okolí počtov 166 a 167. Najčastejšie uvádzaným prípadom bolo: 166, 167, 166, 167, 166, 167, 166, 167, 166, 167, 168, 167.

Bodovanie:
odpoveď, že 1999 to nemohlo a 2000 to mohlo byť – 1b.; zdôvodnenie, prečo musí byť súčet párny – 2b.; konkrétny prípad – 2b.

Úloha M2: Deky. *Opravoval Samuel „Samo“ Sučík.*

Táto úloha mala mnoho správnych spôsobov riešenia, my sa spoločne pozrieme na dva najčastejšie. Začiatok je však vždy rovnaký: prehľadný obrázok všetkého, čo vieme zo zadania – Obr. 1 (dĺžky sú v centimetroch).

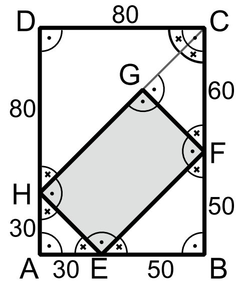


Obr. 1

Už z obrázku vidno, že menší obsah bude mať modrá deka, pretože sa celá zmestila na červenú. Vieme vypočítať obsah červenej: $S_{\text{červená}} = |AD| \cdot |DC| = 110 \cdot 80 = 8800\ \text{cm}^2$.

Strany *DC* a *AB* majú rovnaké dĺžky, a to 80 cm. Preto úsečka *EB* má 80–30=50 cm. Trojuholník *AEH* je pravouhlý a rovnoramenný s ramenami *AH* a *AE*. Ľahko prídeme na to, že rovnoramenný pravouhlý trojuholník musí mať veľkosti uhlov 90°, 45° a 45°. Takže uhly *AEH* a *AHE* majú oba 45°. Uhol *FEB* dopočítame ako 180° – ∢*AEH* – ∢*HEF* = 180°–45°–90° = 45°.

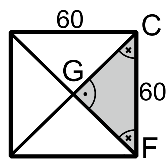
Zopakovaním predchádzajúcej úvahy zistíme, že aj trojuholník *EBF* je rovnoramenný s ramenami *BE* a *BF*, pretože má oba uhly pri základni 45°. Tým pádom vieme, že |*BE*|=|*BF*|=50 cm, a teda |*FC*|=60 cm. Pokračovať sa dá viacerými spôsobmi:



Obr. 2

1. Nezakrytú časť červenej deky rozdelíme na štyri trojuholníky ako na Obr. 2. Vypočítame ich obsahy a odpočítaním od obsahu červenej deky dostaneme plochu modrej. Najprv však treba dokázať, že toto rozdelenie bude naozaj fungovať, teda že priamka *HG* naozaj „trafí“ presne bod *C*. Vlastne si potrebujeme overiť, či sú uhly *DHG* a *DHC* skutočne rovnaké. Uhol *DHG* vypočítame presne tak isto, ako v predošlom odseku uhol *FEB*, a prídeme na to, že ∢*DHG*=45°. Teraz sa pozrieme na trojuholník *HCD* a vidíme, že je pravouhlý a rovnoramenný (s ramenami *DH* a *DC* dĺžky 80 cm), a preto jeho uhly *DHC* aj *DCH* musia mať oba 45°. Takže naozaj platí, že ***∢DHG = ∢DHC***. Tým sme ukázali, že bod *G* skutočne leží na úsečke *HC* a naším rozdelením na štyri trojuholníky sme pokryli celú nezakrytú časť červenej deky.

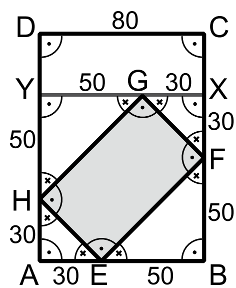
Už „klasickou“ úvahou prídeme na to, že aj trojuholník *FCG* je pravouhlý a rovnoramenný. Všetky uhly veľkosti 45° sú na Obr. 2 označené krížikom.



Obr. 3

Teraz spočítame obsahy našich štyroch trojuholníkov. V pravouhlom rovnoramennom trojuholníku je každé rameno zároveň výškou na to druhé rameno, takže obsah takéhoto trojuholníka je jednoducho $S = r{\cdot}r/2$, kde r je dĺžka ramena. Teraz už vieme vypočítať obsahy troch trojuholníkov: $S_{AEH} = 30{\cdot}30/2 = 450\ \text{cm}^2$, $S_{HCD} = 80{\cdot}80/2 = 3200\ \text{cm}^2$, $S_{EBF} = 50{\cdot}50/2 = 1250\ \text{cm}^2$. Trojuholník *FCG* má ramená neznámej dĺžky, ale využijeme, že štyri rovnaké pravouhlé rovnoramenné trojuholníky sa dajú poskladať do štvorca ako na Obr. 3. Obsah takéhoto štvorca bude v tomto prípade $60{\cdot}60 = 3600\ \text{cm}^2$, takže $S_{FCG} = 3600/4 = 900\ \text{cm}^2$. Už len tieto obsahy odpočítať od obsahu červenej deky: $S_{modrá} = 8800\ \text{cm}^2 - 450\ \text{cm}^2 - 1250\ \text{cm}^2 - 3200\ \text{cm}^2 - 900\ \text{cm}^2 = \mathbf{3000\ cm^2}$. *Viacerí z Vás, žiaľ, zabudli overiť, že rozdelenie na trojuholníky skutočne funguje.*

2. Modrú deku uzatvoríme do štvorcovej časti červenej deky ako na Obr. 4. Samotné výpočty potom prebiehajú veľmi podobne ako pri prvej možnosti, preto ich už nebudem detailne rozpisovať. Vedú, pravdaže, k rovnakému výsledku $\boldsymbol{S_{modrá}} = \mathbf{3000\ cm^2}$. *Aj tu však bolo potrebné zdôvodniť, prečo je ABXY naozaj <u>štvorec</u> so stranou 80 cm.*



Obr. 4

<u>Bodovanie</u>:

správne riešenie – 5b.; bez slovných zdôvodnení – max. 2b.; za nedostatky v dôkazoch som strhával 0,5 až 2b.

<u>Poznámka</u>:

Mnohí z Vás úlohu riešili narysovaním a následným odmeraním rozmerov modrej deky. Takémuto spôsobu sa vyhýbajte, pokiaľ sa výsledok dá aj vypočítať; meranie je totiž nepresné a funguje len pri jednoduchých útvaroch. Počítanie bude vždy presné aj pre akokoľvek zložité prípady.

Častou chybou bol aj predpoklad, že bod G leží na strane DC. Ako sme ukázali vyššie, nie je tomu tak. A ľahko to uvidíte, ak si deky skúsite presne narysovať. Preto odporúčam každú podobnú geometrickú úlohu si najprv čo najpresnejšie narysovať. Nesmieme sa síce na narysovaný obrázok spoliehať ako na dôkaz, ani z neho pravítkom merať neznáme vzdialenosti, ale aspoň získame lepšiu celkovú predstavu o tom, kde sa ktoré body nachádzajú.

Úloha M3: Kroky púšťou. *Opravoval Marek „Káčer" Fedák.*

Hľadáme dve 4-ciferné čísla, ktoré si môžeme zapísať ako ABCD a DCBA.

Najskôr budeme hľadať také dve čísla, ktoré nám dajú čo najväčší súčet. Je zrejmé, že chceme použiť cifry 9, 8, 7 a 6, pretože použitím nižších cifier by sme dostali nižší súčet. Keďže chceme dostať súčet cifier na mieste tisícok čo najväčší, zvolíme si za A a D cifry 9 a 8. Či bude A=9 a D=8, alebo naopak, na tom nezáleží. Jednoducho preto, lebo v sčítaní ABCD+DCBA sa každé z nich práve raz vyskytne na mieste tisícok a práve raz vyskytne na mieste jednotiek. Rovnakou úvahou dosadíme 7 a 6 za písmená B a C. Každé z nich sa v sčítaní práve raz vyskytne na mieste stoviek a práve raz na mieste desiatok. Číslo ABCD by potom mohlo byť napríklad 9768. **Severin mohla počas celej cesty narátať *najviac* 9768+8679 = 18447 krokov.**

Pri hľadaní najmenšieho súčtu nám nebude stačiť vybrať štyri najmenšie cifry, pretože súčet takýchto čísel by bol len 4-ciferný.

Keď chceme, aby bol výsledný súčet 5-ciferný, ale zároveň čo najmenší, tak určite chceme, aby začínal v tvare 10_ _ _. Čo to znamená pre súčet cifier A+D? Ak by bolo A+D=11 alebo viac, výsledné 5-ciferné číslo by nezačínalo v tvare 10_ _ _, a teda by bolo priveľké. Ak by bolo A+D práve 10, znamenalo by to, že daný výsledok už je 5-ciferné číslo, a už by nám stačilo za B a C zvoliť čo najmenšie cifry, čiže 0 a 1. Také čísla by mohli byť napríklad 2018+8102=10120 alebo 3017+7103=10120.

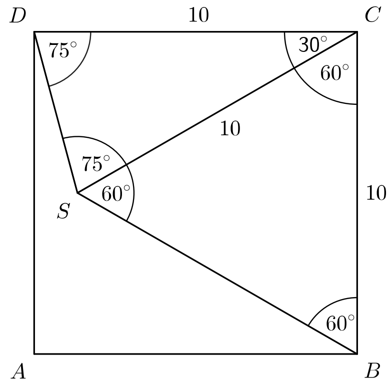
Ale čo ak by sme zvolili za A a D takú dvojicu cifier, ktorých súčet je iba 9? Aj to by mohlo fungovať, akurát musíme zabezpečiť, aby po sčítaní stoviek vznikol presun k tisíckam, aby bol výsledok naozaj 5-ciferný. Aby vznikol presun, súčet B+C musí byt aspoň 10. Keďže hľadáme najmenší možný súčet, tak zvolíme B+C práve 10. To vieme dostať viacerými spôsobmi, výsledok však bude vždy rovnaký. Napríklad: 1378+8731 = 10109, alebo 2467+7642 = 10109, a mnohé ďalšie.

Ak by A+D bolo iba 8 alebo menej, tak by (ani pomocou presunu) nevznikol 5-ciferný výsledok. Keďže 10109 < 10120, **Severin mohla počas celej cesty narátať *najmenej* 10109 krokov.**

Bodovanie:

najväčší počet krokov – 1b.; najmenší počet krokov 10109 – 2b.; najmenší počet krokov 10120 – 1b.; vysvetlenie postupu – 2b.

Úloha M4: Ceduľka. *Opravovala Ľudmila „Ľudka“ Šimková.*



Nakreslime si štvorec *ABCD* s bodom *S*. Našou úlohou je zistiť dĺžku úsečky *BS*. V trojuholníku *DSC* poznáme veľkosti uhlov pri vrcholoch *D* a *C*, pomocou ktorých ľahko dorátame veľkosť tretieho uhla pri vrchole *S*. Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°, od čoho odrátame veľkosti zvyšných dvoch uhlov: $|\sphericalangle DSC|=180°-|\sphericalangle CDS|-|\sphericalangle DCS|=180°-75°-30°=75°$. Trojuholník *DSC* má dva zhodné uhly, teda je rovnoramenný a strany *DC* a *SC* musia obe merať 10 cm.

Pozrime sa teraz na trojuholník *SCB*. Veľkosť uhla *SCB* dorátame z pravého uhla štvorca. $|\sphericalangle SCB|=90°-|\sphericalangle DCS|=90°-30°=60°$. Ďalej vieme, že strany *SC* a *BC* sú obe dlhé 10 cm, a teda uhly pri vrcholoch *S* a *B* majú rovnakú veľkosť. Keďže dokopy musia mať 120° (doplnok do 180° k uhlu *SCB*), tak každý z nich má veľkosť 60°. Zistili sme, že v trojuholníku *SCB* majú všetky uhly veľkosť 60°, a teda je rovnostranný. Tým pádom aj **strana *SB* má dĺžku 10 cm**.

Bodovanie:
výsledok – 2,5b.; rovnoramennosť trojuholníka *SDC* – 1b.; rovnostrannosť trojuholníka *SBC* – 1,5b.

Úloha M5: Uliho kumpáni. *Opravoval Pavol „Tamarka“ Hronský.*

Úloha takéhoto typu sa dá riešiť dvomi spôsobmi. Prvý, ísť vetu po vete a logicky sa snažiť vyvodiť nejaký záver o správnosti či nesprávnosti riešenia. Druhý, v tomto prípade jednoduchší spôsob, kedy predpokladáme riešenie a snažíme sa ho vyvrátiť.

Predpokladajme, že Freda drží Zolo. Ak by to tak bolo, potom všetky Zolove odpovede sú nepravdivé: *„Xolo ho drží“* – nepravda; *„Freda som sa nedotkol“* – nepravda; *„Ja ho nedržím“* – nepravda. Zo zadania však vieme, že u žiadneho z kumpánov nesmú byť všetky vety len nepravdivé. Takže náš predpoklad bol nesprávny, **teda Zolo Freda nedrží.**

Predpokladajme, že Freda drží Xolo. Ak by to tak bolo, tak prvá a tretia Zolova odpoveď je pravdivá: *„Xolo ho drží“* – pravda; *„Ja ho nedržím“* – pravda. Rovnako tak aj prvá a tretia Yolova odpoveď je pravdivá: *„Ja ho nedržím“* – pravda; *„Xolo klame, ak tvrdí, že všetko čo hovoril Zolo je lož“* – pravda (lebo nikto nemôže hovoriť iba lži). Zaujímavé sú druhé odpovede Zola a Yola, ktoré si odporujú, lebo jedna druhú priamo označuje za lož. Tým pádom z nich nutne musí byť jedna pravdivá a druhá nepravdivá. A tu prichádzame do sporu, pretože ak ktorýkoľvek z dvojice Zolo a Yolo svojou druhou vetou hovoril pravdu, tak hovoril pravdu vždy, čo je neprípustné. **Teda ani Xolo Freda nedrží.**

Predpokladajme, že Freda drží Yolo. Zolova prvá odpoveď je lož – *„Xolo ho drží“*; a tretia je pravda – *„Ja ho nedržím.“* O druhej zatiaľ nič nevieme, môže byť pravda aj lož. Xolova prvá a druhá odpoveď sú lži: *„Yolo ho nedrží“* – lož; *„Zolo vo všetkom klame“* – lož. Ale tretia Xolova veta je pravda – *„Ja ho nedržím.“* Yolo zas klamal v prvej odpovedi *„Ja ho nedržím“* – lož; o druhej odpovedi sa nevieme rozhodnúť, a o tretej sme už v predošlom odseku ukázali, že je vždy pravda.

Všimnite si, že každý z kumpánov aspoň raz hovoril pravdu a aspoň raz klamal. Pýtate sa, čo s druhou odpoveďou od Zola a Yola? Nuž, tie si odporujú, takže jedna bude lož a druhá bude pravda, ale to na výsledku nič nemení. Podmienky zo zadania sú tak či tak splnené, a preto môžeme smelo prehlásiť, že **Freda drží Yolo**.

Bodovanie:
správna možnosť s odôvodnením – 2,5b.; odôvodnenie, prečo Freda nedržal Xolo – 1,5b.; odôvodnenie, prečo Freda nedržal Zolo – 1b.